Panorama: groupe linéaire, groupe orthogonal

1. Groupe linéaire et groupes associés ($\mathrm{SL}(\mathrm{E}), \mathrm{PGL}(\mathrm{E}), \mathrm{PSL}(\mathrm{E})$).
   – Générateurs: dilatations, transvections. Les transvections engendrent $\mathrm{SL}(\mathrm{E})$. Si $\dim \mathrm{E} \geq 3$ deux transvections quelconques sont conjuguées.
   – Applications: centre, sous-groupe dérivé. Simplicité de $\mathrm{PSL}(\mathrm{E})$ (plus difficile).
   – Cas d'un corps fini: description des groupes $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$ pour $q = 2, 3, 4, 5$.

2. Sous-groupes de $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$: groupe des matrices diagonales, monomiales, triangulaires. Groupe orthogonal, symplectique, unitaire.

3. Les groupes $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$.
   – Générateurs: symétries orthogonales, réflexions, renversements.
   – Applications: centre, groupe dérivé. Simplicité (plus difficile). Isomorphismes $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R}) \cong \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\}$, $\mathrm{SO}(4, \mathbb{R}) \cong \big(\mathrm{SU}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})\big)/\{\pm 1\}$.

4. Propriétés topologiques de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$: connexité, compacité. $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{U}(n, \mathbb{C})$) est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$).

5. Décompositions remarquables dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$:
   – Décomposition de Jordan (Dunford?): $g = g_d\, g_u = g_u\, g_d$, g_d diagonalisable sur $\mathbb{C}$, $g_u - \mathrm{I}$ nilpotente.
   – Décomposition polaire: $g = kh$, k orthogonale (resp. unitaire), h symétrique (resp. hermitienne) positive.
   – Décomposition d'Iwasawa: $g = kan$, k orthogonale (resp. unitaire), a diagonale à coefficients > 0 , n triangulaire sup. à coefficients diagonaux 1.
   – Décomposition de Bruhat: $g = t\sigma u$, t triangulaire supérieure, σ matrice de permutation, u triangulaire inférieure avec coefficients diagonaux égaux à 1.

6. Sous-groupes finis de $\mathrm{O}(2, \mathbb{R})$ et $\mathrm{O}(3, \mathbb{R})$ (voir par exemple Berger, *Géométrie*, I.1. Ne pas oublier en application les sous-groupes finis de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$).

Partie correspondante du programme:
II.4. Groupes classiques: groupe général linéaire, groupe spécial linéaire; groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal; groupe unitaire, groupe spécial unitaire.
II.5. Groupe affine. Groupe des homothéties-translations. En dimension 2 ou 3, groupe des isométries laissant stable une partie de l'espace.
IV.4. Groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal. Décomposition dun automorphisme orthogonal en produit de réflexions. Endomorphismes symétriques, endomorphismes normaux. Décomposition polaire dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3 : groupe des rotations; produit mixte, produit vectoriel; angles.
IV.5. Groupe unitaire, groupe spécial unitaire. Diagonalisation des endomorphismes normaux. Décomposition polaire dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

Leçons d'oral concernées:
106. Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$. Applications.
107. Sous-groupes finis de $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$, de $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$. Applications.
131. Exemples de décompositions remarquables dans le groupe linéaire. Applications.
142. Utilisation des groupes en géométrie.

Références :
Le Perrin est incontournable...