Université de Nice
Agrégation de Mathématiques
Oral de Mathématiques générales

Année 2003-2004

Permutations. Groupe symétrique. (Première partie)

On rappelle ici l'essentiel de ce qu'il faut savoir sur les permutations sous forme de questions faciles (la réponse devrait être un réflexe) ou d'exercices nécessitant un peu plus de travail.

Soit E un ensemble fini, à n éléments. Le plus souvent, on appelle $1, \ldots, n$ les éléments de E, i.e. $E = \{1, \ldots, n\}$.

1 Permutations

1.– Rappeler la notion de *permutation* de E

2.– Montrer que le nombre de permutations de E est $n!$.

Notation pour une permutation σ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

On peut composer deux permutations σ et σ'. On note le résultat $\sigma \circ \sigma'$ ou simplement $\sigma\sigma'$. Une permutation σ admet une et une seule permutation *réciproque* (ou *inverse*) notée σ^{-1}, caractérisée par les égalités $\sigma\sigma^{-1} = \mathrm{Id_E}$ et $\sigma^{-1}\sigma = \mathrm{Id_E}$, où $\mathrm{Id_E}$ est l'identité de E. (D'ailleurs chacune de ces égalités implique l'autre (pourquoi ?)). Rappeler le sens de σ^k, avec $k \in \mathbb{Z}$.

3.– Il faut apprendre à calculer la composition (on dit aussi le *produit*) de deux permutations aussi facilement que l'on fait des additions. Calculer

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

4.– Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$. Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{k}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

5.– On dit que deux permutations σ et σ' commutent si $\sigma\sigma' = \sigma'\sigma$. Montrer que si $n = 1$ ou 2, deux permutations commutent toujours. Montrer que c'est faux dès que $n \geq 3$. Montrer que σ^n et σ^m $(n, m \in \mathbb{Z})$ commutent toujours.

2 Cycles et transpositions

6.– Rappeler la définition d'un *cycle d'ordre k*, de son *support*.

On utilise une seconde notation pour les cycles : $\sigma = (i\ j\ k)$ si $\sigma(i) = j, \sigma(j) = k, \sigma(k) = i$ et $\sigma(x) = x$ pour $x \notin \{i, j, k\}$. Remarques : cette notation suppose que i, j, k sont deux à deux distincts ; elle n'indique pas combien vaut n contrairement à la notation générale des permutations.

7.– Parmi les permutations des questions 3. et 4., quelles sont les cycles ? Pouvez-vous les réecrire à l'aide de la notation pour les cycles.

8.– Montrer que deux cycles de supports disjoints commutent.

On appelle *transposition* un cycle d'ordre 2.

9.– Montrer qu'une transposition est égale à son inverse.

10.– Combien y a-t-il de cycles d'ordre k ?

11.– Calculer $(1\ 2)(2\ 3)$, $(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4)$, $(i\ j)(j\ k)$ (discuter suivant que $i = k$), $(i\ j)(j\ k)(k\ l)$ (discuter).

12.– Montrer que tout cycle est un produit de transpositions.

13.– Calculer $\sigma^{-1}(i\ j)\sigma$ (C'est *le conjugué de* $(i\ j)$ *par* σ). Calculer $\sigma^{-1}(i\ j\ k)\sigma$. Décrire le conjugé d'un cycle par σ. Montrer que deux cycles sont conjugués si et seulement si ils ont le même ordre.

Exercice 1 : (Décomposition en produit de cycles) Montrer que toute permutation σ s'écrit comme produit de cycles de supports deux à deux disjoints : $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_k$. Montrer que cette décomposition est unique, à l'ordre près.

14.– Décomposer les permutations des questions 3 et 4 en produit de cycles.

3 Groupe symétrique et familles génératrices

15.– Rappeler la définition d'un *groupe*, d'une *famille génératrice* d'un groupe.

16.– Montrer que l'ensemble des permutations de E forme un groupe pour la composition. Quel est son élément neutre ?

On note $\mathcal{S}_E$ ce groupe, ou $\mathcal{S}_n$ si $E = \{1, \dots, n\}$.

17.– Montrer que les cycles forment une famille génératrice de $\mathcal{S}_n$ (utiliser l'exercice)

18.– Montrer que les transpositions forment une famille génératrice. (utiliser 12. et 18.)

19.– Montrer que les $n-1$ transpositions $(1\ 2)$, $(2\ 3)$, $\dots$, $(n-1\ n)$ engendrent $\mathcal{S}_n$ (utiliser 11. et 18.)

20.– Montrer que les $n-1$ transpositions $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, $\dots$, $(1\ n)$ engendrent $\mathcal{S}_n$.

21.– Montrer qu'un cycle d'ordre n et une transposition engendrent $\mathcal{S}_n$. (utiliser 13. et 19.)

L'exercice suivant n'est pas un résultat fondamental mais il peut faire un développement intéressant

Exercice 2 : Montrer qu'une famille génératrice de transpositions de $\mathcal{S}_n$ a au moins $n-1$ éléments. Montrer que si elle a strictement plus de $n-1$ éléments, on peut en extraire une sous-famille génératrice à $n-1$ éléments.