Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Intégrales Impropres, Année 2004-2005.

Exercice 1

Convergence et calcul éventuel des intégrales impropres suivantes :

$$a) \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt,\ b) \int_e^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^2}\,dt,\ c) \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+2t-3}\,dt,$$
$$d) \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt,\ e) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\,dt.$$

Exercice 2

Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_1^{+\infty} f$ converge. Montrer la convergence pour tout $a>0$ de
$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^a}\,dt.$$

Exercice 3

Etudier la convergence de
$$\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt\right)dx.$$
(On commencera par poser $f(x)=\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ dont on justifiera l'existence pour $x \geq 0$.)

Exercice 4

Soit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettant L pour limite en $+\infty$ et l en $-\infty$. Montrer la convergence et calculer la valeur de l'intégrale impropre suivante :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t+1)-f(t))\,dt.$$

Exercice 5

Convergence des intégrales impropres suivantes :

$$f) \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\,dt,\ g) \int_0^1 \frac{\mathrm{ch}t-\cos t}{t^{5/2}}\,dt,\ h) \int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{1-t}}\,dt,$$
$$i) \int_0^{+\infty} t\cos(t^3)\,dt,\ j) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\,dt,\ k) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4\sin^2 t}\,dt.$$

Exercice 6

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge et soient $a,b>0$.
Montrer la convergence et calculer la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt.$$

Application : calculer $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt$.

Exercice 7

On note E l'ensemble des fonctions f continues sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que la fonction $t \mapsto \frac{f(t)^2}{1+t^2}$ soit intégrable sur $]0,+\infty[$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 8

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$. Montrer que si f et f'' sont de carré intégrable, alors f' est de carré intégrable. Montrer de plus que
$$\left(\int_0^{+\infty} f'^2\right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} f^2\right)\left(\int_0^{+\infty} f''^2\right).$$