Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Equations différentielles, Année 2004-2005.

Exercice 1 (Une démonstration de Cauchy-Lipschitz dans un cas particulier)

1) Rappel : un théorème de point fixe.
Soit E un espace vectoriel normé complet (on note $||\cdot||$ la norme en question). Soit $f : E \longrightarrow E$ telle que

$$||f(x) - f(y)|| \leq k||x - y|| \quad x, y \in E \tag{1}$$

où $k \in [0, 1[$ (f est contractante).

a) Soient $x_0 \in E$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $x_{n+1} = f(x_n) \quad n \in \mathbb{N}^*$. Montrez que

$$||x_{n+1} - x_n|| \leq k^n||x_1 - x_0||$$

et en déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

b) Montrez qu'il existe $x \in E$ tel que $x = f(x)$ (x est un point fixe de f).

c) Montrez que ce point fixe est unique.

d) Montrez que ces résultats (existence et unicité du point fixe) restent vrais si l'on remplace la condition (1) par

$$||f^N(x) - f^N(y)|| \leq k||x - y|| \quad \forall x, y \in E$$

pour $N \in \mathbb{N}^*$.

2) Application aux équations différentielles.
Soit f une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$||f(x) - f(y)|| \leq L||x - y|| \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

où $L \in \mathbb{R}$. Considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

a) Notons E l'espace $C^0([0, T], \mathbb{R}^n)$ muni de la norme $||y||_E = \sup_{t\in[0,T]} ||y(t)||_{\mathbb{R}^n}$. Montrez que l'application Φ qui à tout élément y de E associe la fonction $\Phi(y)$ de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\Phi(y)(t) = y_0 + \int_0^t f(y(s))\,ds$$

est une application continue de E dans lui-même.

b) Soient y et $\tilde{y}$ deux éléments quelconques de E. Démontrez l'inégalité

$$||\Phi^p(y)(t) - \Phi^p(\tilde{y})(t)||_E \leq L^p\frac{t^p}{p!}||y - \tilde{y}||_E \quad \forall t \in [0, T].$$

c) Déduisez-en que le problème (2) admet une unique solution sur $[0, T]$.

Exercice 2 (Résolutions explicites)

Résoudre

$$y'' + \alpha y' + y = 0, \quad \text{coefficients constants},$$

$$y' = \sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - x^2}}, \quad \text{variables séparés},$$

$$y' = \frac{y}{x + y^2}, \quad \text{intégrale première},$$

$$(1 - x^3)y' + x^2y + y^2 - 2x = 0, \quad \text{équation de Riccati},$$

$$xy'(2y - x) = y^2, \quad \text{équation homogène}.$$

Exercice 3 (Lemme de Gronwall)

Soit a une fonction de classe C^1 sur $[0,T]$ et u, v des fonctions continues sur $[0,T]$ avec $v \geq 0$. On suppose que

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^t u(s)v(s)\,ds,$$

montrer que

$$u(t) \leq \sup_{0\leq s\leq t} |a(s)| e^{\int_0^t v(s)\,ds}.$$

En d'eduire que pour $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1, > 0 et croissante, toute solution de

$$y'' + q(t)y = 0$$

est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 4 (Point milieu)

Montrer que la méthode du point milieu donne un shéma numérique d'ordre ≥ 2.

Exercice 5 (Schéma numérique)

Soit le schéma définit par le flux

$$\Phi(t,y,h) = \alpha f(t,y) + \beta f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t,y)) + \gamma f(t+h, y + hf(t,h)).$$

On suppose que f est C^∞ et k-lipschitzienne (par rapport à y). Déterminer les conditions sur (α, β, γ) pour que le schéma associé soit a) stable, b) consistant, c) convergent, d) d'ordre ≥ 1, e) d'ordre ≥ 2.

Exercice 6 (Série entière et équation différentielle)

1) On se donne l'équation différentielle suivante

$$(\mathcal{E}) \qquad\qquad (x - x^2)\, y'' + (1 - 3\,x)\, y' - y = 0\ .$$

On cherche une solution, que l'on appelle y_1, de cette équation $(\mathcal{E})$ qui soit développable en série entière. On suppose donc que cette solution est de la forme :

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{sur l'intervalle de convergence }]-R, R[.$$

2) a) Montrer que $a_1 = a_0$ et que $(n+1)^2\ (a_{n+1} - a_n) = 0$, pour tout $n \geq 1$.
b) En déduire la valeur de a_n en fonction de a_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis une expression simple de $y_1(x)$ en fonction de a_0 et de x (c'est-à-dire que l'on donnera la valeur de la somme de la série entière obtenue). Préciser son rayon de convergence.

c) On cherche les autres solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$. On pose pour cela $y_2(x) = \dfrac{\lambda(x)}{1-x}$ où λ est une fonction que l'on cherche à déterminer. On suppose donc que y_2 est solution de $(\mathcal{E})$.
En déduire que la fonction λ vérifie $x\lambda'' + \lambda' = 0$.
Résoudre cette dernière équation et en déduire la forme générale des solutions de $(\mathcal{E})$.

Exercice 7 (Solutions maximales)

Considérons le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$, où $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne de constante de Lipschitz k.
1) Montrer qu'il existe une unique solution maximale.
2) Montrer que cette solution vérifie

$$|y(t) - y_0| \leq |t||f(y_0)|e^{k|t|},$$

pour tout t dans l'intervalle maximal.
3) Montrer que la solution maximale est globale.

Exercice 8 (Equation d'ordre 2)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $p, q \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et l'équation différentielle
$$y'' + py' + qy = 0.$$
Montrer que toute solution non nulle a un nombre fini de zéros sur tout intervalle compact de I.

Exercice 9 (Système proie-prédateur)

Cet exercice a pour objet l'étude d'un modèle de dynamique des populations de proies et de prédateurs.

Soient $x(t)$ le nombre de proies (sardines ?) et $y(t)$ le nombre de prédateurs (requins...) à la date t. Le modèle d'évolution de ces populations proposé par Volterra est le système différentiel
$$\begin{cases} x' = x(1-y), \\ y' = y(x-1). \end{cases} \tag{3}$$

1) Interprétez ce système différentiel.
2) Que peut-on dire concernant un problème de Cauchy associé à (3) ?
3) Résolvez les problèmes de Cauchy constitués de (3) et de $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = y_0 \geq 0 \end{cases}$, puis $\begin{cases} x(0) = x_0 \geq 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.
4) Soient $x_0 > 0$, $y_0 > 0$.
a) Montrez que la solution maximale de (3) partant de (x_0, y_0) à $t = 0$ vérifie, pour tout t de son intervalle maximal, $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$.
b) Montrez qu'il existe une fonction F définie sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ telle que la solution maximale de (3) partant de (x_0, y_0) à $t = 0$ vérifie $F(x(t), y(t)) = C$ où C est une constante.
c) Déduisez-en que pour tout $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}^+)^2$, la solution maximale de (3) partant de (x_0, y_0) à $t = 0$ est définie pout tout $t \geq 0$.
5) On divise $(\mathbb{R}^{+*})^2$ en les quatre ouverts A, B, C, D :
$$\begin{cases} A = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \quad t.q. \quad x > 1, y > 1\}, \\ B = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \quad t.q. \quad x < 1, y > 1\}, \\ C = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \quad t.q. \quad x < 1, y < 1\}, \\ D = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \quad t.q. \quad x > 1, y < 1\}. \end{cases}$$
a) Montrez que la solution maximale de (3) partant de (x_0, y_0) à $t = 0$ sort de A en temps fini.
b) Quel est le comportement ultérieur de cette solution maximale ?
6) Soient $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Montrez que la solution maximale de (3) partant de (x_0, y_0) à $t = 0$ est périodique.
7) Tracez les trajectoires décrites par les solutions maximales de (3).

Exercice 10 (Solution bornée)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, bornée. Montrer qu'il existe une unique solution bornée à l'équation $y' - ky = A$ avec $k > 0$.

Exercice 11 (Equations autonomes)

Considérons l'équation différentielle dans $\mathbb{R}$: $y' = f(y)$, où f est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $y :]a, b[\to \mathbb{R}$ une solution maximale ($]a, b[$ est l'intervalle maximal associé, $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$).

1) a) Montrer que toutes les translatées en t de y sont aussi des solutions maximales.

b) On suppose que y a pour données initiales $(0, y_0)$ et soit $\tilde{y} :]\tilde{a}, \tilde{b}[\to \mathbb{R}$ une autre solution maximale, de données initiales (t_0, y_0). Alors $\{y(t); t \in]a, b[\} = \{\tilde{y}(t); t \in]\tilde{a}, \tilde{b}[\}$.

On parle alors de l'orbite de l'équation $y' = f(y)$ issue du point y_0.

On suppose dans la suite que $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que si l'intégrale $\int_0^{+\infty} 1/f(x)\, dx$ est convergente, on a $b < +\infty$ (explosion en temps fini de y) et que si cette intégrale est divergente, on a $b = +\infty$. (On pourra commencer par montrer que y est une bijection de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$).

3) Montrer que si l'intégrale $\int_0^{-\infty} 1/f(x)\, dx$ est convergente, on a $a > -\infty$ (explosion en temps fini de y) et que si cette intégrale est divergente, on a $a = -\infty$.