Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis, Espaces de Hilbert, Année 2004-2005.

Exercice 1 (Egalité du parallélogramme)

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la norme $\|.\|$ provient d'un produit scalaire si et seulement si elle satisfait l'égalité du parallélogramme :

$$\forall x, y \in E, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

(On pourra poser $\varphi(x,y) = (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)/2$ et montrer que ceci définit un produit scalaire tel que $\varphi(x,x) = \|x\|^2$ de la façon suivante :

(1) Vérifier que $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$, $\varphi(x,-y) = -\varphi(x,y)$ et $\varphi(x,2y) = 2\varphi(x,y)$.
(2) Montrer que $\varphi(x+y,z) = \varphi(x,z) + \varphi(y,z)$. (On pourra considérer l'identité du parallélogramme avec (x,y), puis $(x+z, y+z)$ et enfin $(x+y+z, z)$.)
(3) En déduire que $\varphi(\alpha x, y) = \alpha\varphi(x,y)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. (Considérer d'abord le cas de $\alpha \in \mathbb{Q}$.))

Exercice 2 (Projection sur un convexe)

Soit H un hilbert réel de produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ et K un convexe, fermé, non vide de H. Montrer que pour tout $f \in H$, il existe un unique $u \in K$ tel que

$$\|f-u\| = \inf_{v\in K} \|f-v\|.$$

De plus, u est caractérisé par

$$u \in K, \qquad (f-u \mid v-u) \le 0, \, \forall v \in K.$$

On pose $u = P_K f$. Montrer que P_K est lipschitzienne de constante 1.

Exercice 3 (Théorème de Stampacchia)

Soit H un espace de Hilbert réel de produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$. Soit a une forme bilinéaire continue ($|a(x,y)| \le C\|x\|\|y\| \quad \forall x,y \in H$) et coercive ($a(x,x) \ge \alpha\|x\|^2 \quad \forall x \in H$).

(1) Montrer qu'il existe un opérateur $T \in \mathcal{L}(H,H)$ tel que $a(x,y) = (T(x) \mid y)$, $\forall x, y \in H$.
(2) Pour $\varphi \in H'$, il existe $f \in H$ tel que $\varphi(v) = (f,v)$ pour tout $v \in H$. Soit $r > 0$ quelconque. Montrer que

$$a(u, v-u) \ge \varphi(v-u) \quad \forall v \in K, \qquad (E)$$

équivaut a

$$u = P_K(rf - rT(u) + u).$$

(3) On pose $S(v) = P_K(rf - rT(v) + v)$ Montrer que S est une contraction stricte pour r bien choisit.
(4) Conclure qu'il existe u dans K unique verifiant (E).
(5) On suppose ici que a est de plus symétrique. On définit $\phi : H \to \mathbb{R}$ par $\phi(x) = \dfrac{1}{2}a(x,x) - \varphi(x)$. Montrer que u est caractérisé par $\phi(u) = \inf_{x\in K} \phi(x)$.

Exercice 4 (Convergence faible)

Soit H un espace de Hilbert, muni du produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H converge faiblement vers un élément x de H si, pour tout $y \in H$,

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n \mid y) = (x \mid y).$$

On note $x_n \rightharpoonup x$.

(1) Montrer que $x_n \to x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$.
(2) Montrer que ($x_n \rightharpoonup x$ et $\|x_n\| \to \|x\|$) $\Rightarrow x_n \to x$.
(3) Montrer qu'une suite faiblement convergente est bornée.

Exercice 5 (Théorème ergodique de von Neumann)

Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|T\| \leq 1$.

(1) Démontrer que si $x \in H$, alors $Tx = x$ si et seulement si $(Tx \mid x) = \|x\|^2$.

(2) En déduire que $\operatorname{Ker}(Id - T) = \operatorname{Ker}(Id - T^*)$.

(3) Démontrer que $\big(\operatorname{Im}(Id - T)\big)^{\perp} = \operatorname{Ker}(Id - T)$ et en déduire

$$H = \operatorname{Ker}(Id - T) \oplus \overline{\operatorname{Im}(Id - T)}.$$

(4) Démontrer le résultat suivant : *Soit H un espace de Hilbert et $J \subset H$. Soit (Φ_n) une suite bornée de $\mathcal{L}(H)$ et $\Phi \in \mathcal{L}(H)$. Si la suite $\big(\Phi_n(x)\big)$ converge vers $\Phi(x)$ pour tout $x \in J$, alors $\big(\Phi_n(x)\big)$ converge encore vers $\Phi(x)$ pour tout $x \in \overline{J}$.*

(5) On pose, pour $n \geq 1$,

$$T_n = \frac{1}{n+1}[Id + T + \ldots + T^n].$$

Montrer que pour tout $x \in H$, $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n x = Px$ où P est la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker}(Id - T)$. (*Indication :* On considèrera successivement le cas $x \in \operatorname{Ker}(Id - T)$, $x \in \operatorname{Im}(Id - T)$ et $x \in \overline{\operatorname{Im}(Id - T)}$.)