Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Calcul de normes, Année 2004-2005.

Exercice 1

On considère $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ normés par $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $S : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ défini par

$$S(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \quad \text{pour } f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}).$$

Montrer que S est continu et calculer sa norme.

Soit maintenant $T : \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ défini par

$$T(f) = f'$$

Est-ce que T est continue ?

Exercice 2 (Espace l^p)

On note pour $p \geq 1$,

$$l^p(\mathbb{N}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ réelle } ; \sum_{n\geq 0} |u_n|^p < +\infty\},$$

muni de la norme

$$\|(u_n)\|_p = \left(\sum_{n\geq 0} |u_n|^p\right)^{1/p},$$

et $l^\infty(\mathbb{N})$ l'espace des suites réelles bornées muni de $\|(u_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

Montrer que l^∞ est isométrique à $(l^1)'$ et que pour $p > 1$, $(l^q)'$ est isométrique à l^p où $1/p+1/q = 1$.

Exercice 3 (Séries de Fourier)

On note E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et 2π périodique muni de la norme infini.

On pose pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$c_p(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ipt}\,dt.$$

On défini, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la forme linéaire

$$L_n(f) = \sum_{p=-n}^{n} c_p(f).$$

(1) Montrer que cette forme linéaire est continue et montrer que sa norme vaut

$$\|L_n\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}\right| dt.$$

(2) En déduire qu'il existe des fonctions continues qui ne sont pas somme de leur série de Fourier.

Exercice 4 (Commutateur)

Soit E une espace normé et f, g deux endomorphismes de E vérifiant $f \circ g - g \circ f = Id_E$.

(1) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f \circ g^n - g^n \circ f$.
(2) Montrer que f et g ne sont pas simultanément continus.

Exercice 5

On considère $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ normé par $\|u\|_1 = \sup_{t\in[0,1]} |u(t)|$, et $F = \{u \in E\,;\, u(0) = 0\}$.

(1) L'espace F est-il de Banach ?

(2) Soit $\Phi : u \in F \mapsto \phi(u) = \int_0^1 u(t)dt$. Montrer que $\Phi \in F'$ et calculer $\|\Phi\|_{F'}$.
(3) Existe-t'il $u \in F$ tel que $\|u\| = 1$ et $\Phi(u) = \|\Phi\|_{E'}$.

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. On considère les applications linéaires $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont A, B, C. Calculer leur norme $\ell^i \mapsto \ell^j$ pour $i, j = 1, 2, \infty$.

Soit $D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Calculer $\|D\|_{i,j} = \sup\left\{\frac{\|DX\|_j}{\|X\|_i} \ : \ X \in \mathbb{R}^3\right\}$ où $i, j = 1, 2, \infty$.

Exercice 7

Pour $f \in E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{C})$, on pose $N(f) = \left[|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2 \, dt\right]^{\frac{1}{2}}$.
(1) Montrer que N est une norme sur E.
(2) Montrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f)$.
(3) Les normes N et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?