Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Suites de fonctions, Année 2004-2005.

Exercice 1

Etudier la convergence simple, puis uniforme des suites de fonctions suivantes :

$$a) f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2+1},\ b)\ f_n(x) = \frac{x}{n+|x|},\ c)\ g_n(x) = nx^2 e^{-nx},$$
$$d)\ f_n(x) = nxe^{-nx}\sin x,\ e)\ f_n(x) = \sqrt{x^2+1/n^2},\ f)\ f_n(x) = n^a x e^{-nx}.$$

Dans l'exemple e), que peut-on dire de la dérivabilité des différentes fonctions ?

Exercice 2

Montrer que $(1-\frac{x}{n})^n \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$ converge uniformément vers e^{-x} sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1+n2^n x^2}.$$

1. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$.
2. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f_n : [0,\pi/2] \to [0,\pi/2]$ définie par

$$f_0(x) = 1, \qquad f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(\sin t)\,dt.$$

1. Montrer que
$$0 \le f_n(x) - f_{n-1}(x) \le \frac{x^n}{n!},\ \forall n \ge 1,\ \forall x \in [0,\pi/2].$$
2. Etudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On note f la limite de la suite. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $f'(x) = f(\sin x)$, $f(0) = 1$.

Exercice 5

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est un polynôme.

Exercice 6

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Soit ϕ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $(f_n \circ \phi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \circ \phi$ sur $\mathbb{R}$.

Que peut-on dire de la convergence uniforme de $(\phi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\phi \circ f$?

Exercice 7 (Théorème de Dini)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers f continue.

1. On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Montrer alors que la convergence est uniforme.
2. On suppose cette fois que chaque f_n est une fonction croissante. Montrer que dans ce cas aussi la convergence est uniforme.

Exercice 8 (Polynômes de Bernstein et théorème de Stone-Weierstrass)

Pour $f \in C([0,1],\mathbb{C})$, on considère pour $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, f\left(\frac{k}{n}\right) \, t^k \, (1-t)^{n-k}.$$

1. Calculer $B_n(1)$, $B_n(t)$, et $B_n(t^2)$.
2. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{k}{n} - t\right)^2 t^k (1-t)^{n-k}.$$
3. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, on a
$$\left| \sum_{k \text{ tel que } |t-k/n|>\alpha} C_n^k \left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] t^k (1-t)^{n-k} \right| \leq \frac{\|f\|_{\infty,[0,1]}}{2n\alpha^2}.$$
4. Montrer que $B_n(f)$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.
5. En déduire que toute fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme de polynômes sur $[a,b]$ (Théorème de Stone-Weierstrass).

Exercice 9 (Suite régularisante et théorème de Stone-Weierstrass)

On appelle suite régularisante une suite de fonctions $(\rho_n)_{n\geq 0}$ continues à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\begin{array}{ll} a) & \rho_n \geq 0, \\ b) & \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t)\,dt = 1, \\ c) & \forall \alpha > 0,\ \int_{|t|\geq\alpha} \rho_n(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{array}$$

On définit pour toute fonction f continue à support compact, la convolution de f avec ρ_n selon :

$$f * \rho_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\rho_n(t)\,dt.$$

(Existence de cette intégrale ?)

1. Montrer que la suite de fonctions $(f * \rho_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
2. En utilisant
$$\rho_n(x) = \frac{1}{\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt}(1-x^2)^n \mathbb{1}_{|x|\leq 1},$$
redémontrer le théorème de Stone-Weierstrass.

Exercice 10

Soit $f \in C([0,1],\mathbb{C})$ telle que $\int_0^1 f(t)\,t^n\,dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f = 0$.