Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Intégrale, exemples et applications, Année 2004-2005.

Exercice 1

1) Calculer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}.$$

2) Etudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}.$$

Exercice 2

Soit $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ positive. On pose $\|f\|_n = \left(\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{1/n}$ et $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \|f\|_n = \|f\|_\infty$.

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt.$$

1) Calculer I_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2) En déduire la formule de Wallis :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p}\left(\frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}\right)^2 = \pi.$$

3) Montrer que

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Exercice 4

Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T périodique. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\phi(nt)\,dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^T \phi(t)\,dt\right)\left(\int_a^b f(t)\,dt\right).$$

(On commencera par le cas où $f = 1\!\!1_{[\alpha,\beta]}$ avec $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$.)

Exercice 5

Soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a) = 0$.
Montrer que

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx \leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |f'(x)|^2\,dx,$$

et

$$\int_a^b |f'(x)f(x)|\,dx \leq \frac{b-a}{2}\int_a^b |f'(x)|^2\,dx.$$

Quels sont les cas d'égalité dans ces formules ?

Exercice 6

Soit $f \in C^0([a,b],\mathbb{R}_+^*)$. Montrer que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f \leq \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right).$$

Exercice 7

Soit $f \in C^2([a,b],\mathbb{R}_+^*)$ et $g \in C^0([a,b],\mathbb{R}_+^*)$. On suppose que f admet un extremum unique $c \in]a,b[$ qui est un maximum et tel que $f''(c) < 0$. On pose

$$I_n = \int_a^b g(x) f^n(x)\, dx,$$

et $h(x) = \ln f(x)$.

1) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour $x \in [c, c+\delta]$,

$$\begin{aligned}
& g(c)(1-\varepsilon)e^{nh(c)} \int_c^{c+\delta} e^{n/2\ h''(c)(x-c)^2(1+\varepsilon)}\, dx \\
\leq\ & \int_c^{c+\delta} g(x) e^{nh(x)\, dx} \\
\leq\ & g(c)(1+\varepsilon)e^{nh(c)} \int_c^{c+\delta} e^{n/2\ h''(c)(x-c)^2(1-\varepsilon)}\, dx.
\end{aligned}$$

2) En faisant un changement de variable et en admettant que $\lim\limits_{X\to+\infty} \int_0^X e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}/2$, en déduire que

$$\int_c^{c+\delta} g(x) e^{nh(x)}\, dx \underset{n\to+\infty}{\sim} g(c) e^{nh(c)} \sqrt{\frac{\pi}{-2h''(c)n}}.$$

3) Conclure à un équivalent de I_n quand $n \to +\infty$.