**Préparation à l'agrégation externe de mathématiques - Année 2004-2005**
**Université de Nice-Sophia-Antipolis**

# Exercices de premier cycle - Algèbre Linéaire

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

**Exercice 1.** — Soit B un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit E l'ensemble des applications d'un ensemble A dans B. Montrer que $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'ensemble des suites rélles (par exemple) est un espace vectoriel.

**Exercice 2.** — Montrer que l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un s.e.v. des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et montrer que ces deux espaces sont des supplémentaires de $E$.

**Exercice 3.** — Soit $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{C}^2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ tel que :

$$\mathcal{M}at(f, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ -i & 1-i \end{pmatrix}.$$

Donner $\mathcal{M}at(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$, où $\mathcal{B} = (i \cdot \vec{e}_1, (1+i) \cdot \vec{e}_1 + (1-2i) \cdot \vec{e}_2)$.

**Exercice 4.** — On rappelle qu'un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace $E$ est un sous-espace de $E$ admettant un supplémentaire de dimension 1. Montrer que $H$ est un hyperplan de $E$ ssi $H$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle $\varphi : E \to \mathbb{K}$.

**Exercice 5.** — Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1]; \mathbb{R})$. Trouver un supplémentaire de $F = \{f \in E; \int_{[0,1]} f = 0\}$.

**Exercice 6.** — Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie. Montrer que $E^*$ est isomorphe à $E$.

Identifier les passages de votre preuve qui ne sont pas reproduisibles lorsque $E$ est de dimension infinie.

**Exercice 7.** — Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace.

- Montrer que $E$ s'injecte dans $E^{**}$, par $j : E \to E^{**}$, définie par : pour $x \in E$, $\varphi \in E^*$, $j(x)(\varphi) = \varphi(x)$ (*ind. Utilisez l'existence d'une base pour* $E$).
- En déduire que $E^{**}$ est de dimension finie ssi $E$ est de dimension finie.
- Montrer que $E^*$ est de dimension finie ssi $E$ est de dimension finie (*ind. utiliser la question précédente*).
- Montrer que si un des trois espaces $E, E^*, E^{**}$ est de dimension finie, les autres aussi et qu'ils ont même dimension.

**Exercice 8.** — On rappelle que si $E$ est un $\mathbb{K}$-espace, $F$ un sous-espace de $E$, le quotient $E/F$ suivant la relation d'équivalence $x\mathcal{R}y$ ssi $x - y \in F$ peut être muni d'une structure d'espace qui rend la surjection canonique $\pi : E \to E/F$ ($\pi(x) = \bar{x}$) linéaire. Montrer que tout supplémentaire de $F$ est isomorphe à $E/F$.

Soient $G$ un $\mathbb{K}$-espace et $f : E \to G$ une application linéaire. Montrer que lorsque $F = \ker(F)$, on peut définir un isomorphisme linéaire $\bar{f} : E/F \to Im(f)$ qui rende commutatif le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{cccc} f: & E & \to & G \\ & \downarrow \pi & & \uparrow \\ & E/F & \simeq & Im(f) \end{array}$$

Montrer que tout supplémentaire de $F$ est isomorphe à $Im(f)$. En déduire le théorème du rang lorsque $E$ est de dimension finie.

**Exercice 9.** — Montrer que tout sous-espace d'un espace est l'intersection des hyperplans qui le contiennent.

**Exercice 10.** — On suppose que $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2.

Montrer que l'espace $\mathcal{B}$ des formes bilinéaires sur un espace vectoriel $E$ est somme directe des sous-espaces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ des formes bilinéaires symétriques et anti-symétriques. Lorsque est de dimension finie, donner la dimension de $\mathcal{B}$, de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{A}$.

On note $\mathcal{Q}$ l'espace vectoriel des formes quadratiques sur $E$. Montrer que l'application $f : \mathcal{B} \to \mathcal{Q}$ définie par $f(B)(x,x) = B(x,x)$ donne donne lieu à un isomorphisme $\bar{f}$ qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathcal{B} & \to & \\ & \downarrow \pi & & \mathcal{Q} \\ \bar{f} & \mathcal{B}/\mathcal{A} & \nearrow & \end{array}$$

Donner, pour une forme quadratique $Q$, $\bar{f}^{-1}(Q)$ (dite la *forme polaire de* $Q$).

**Exercice 11.** — Soit $p$ un projecteur de l'espace vectoriel $E$ (ie $p : E \to E$ vérifie $p \circ p = p$). Montrer qu'il existe deux sous-espaces supplémentaires de $E$ tels que $p$ soit la projection associée à la somme directe de ces deux facteurs.

**Exercice 12.** — D8 Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont nuls. (*Procéder par récurrence sur la taille de la matrice*).

**Exercice 13.** — Montrer que l'image par une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est un ellipsoïde de dimension $rg(f)$ dont on donnera les demi-axes.

**Exercice 14.** — Soient $P$ et $Q$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, premiers entre-eux. On note $R = P \cdot Q$. Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev $E$. Montrer que : $\ker(R(u)) = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u))$.

**Exercice 15.** — E8 On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une topologie issue d'une norme quelconque sur $\mathbb{R}^{n^2}$.

1- Montrer que $Gl_n(\mathbb{C})$ est un ouvert connexe et dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (*ind. Montrer que* $M-\lambda I_n$ *et* $(1-\lambda)M-\lambda I_n$ *sont inversibles sauf pour un nombre fini de* $\lambda$). Qu'en est-il de $Gl_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?

2- Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices diagonalisables de valeurs propres deux à deux distinctes est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. (*ind. Dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *toutes les matrices sont triangulables.*) Qu'en est-il de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (*ind. Trouvez dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *une matrice dont le polynôme caractéristique est de discriminant* $< 0$.)

3- Une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{D}$ est-elle un point intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables ? (*ind. Montrer que la matrice* $\begin{pmatrix} \lambda & 1/k \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *n'est pas diagonalisable.*)

4- Montrer que $\mathcal{D}$ est un ouvert.

**Exercice 16.** — G8 Soient $A, B, C, D$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $\mathbb{K}$ infini et $C$ et $D$ qui commutent. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).$$

(*ind. On pourra commencer par supposer que* $D$ *est inversible.*)

**Exercice 17.** — Soit $\mathcal{E}$ un ensemble et $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(\mathcal{E})$ soit un ensemble infini. Montrer que la famille $(f^n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est libre.

**Exercice 18.** — Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice $p$. Montrer que $f - Id$ est inversible et s'exprime en fonction de $f$.

**Exercice 19. (Groupes linéaire et spécial linéaire)** — Soit $\mathbb{K}$ corps commutatif et $n$ un entier naturel. On note classiquement le groupe spécial linéaire de $\mathbb{K}^n$ par $SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); \det(M) = 1\}$.

Soit pour $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, $i \neq j$, $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant tous ses coefficients nuls sauf celui situé sur la ligne $i$ et la colonne $j$, celui-ci étant égal à 1. Soient enfin, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $B_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda \cdot E_{i,j}$ et $\mathcal{S}_n = \bigcup_{\lambda\in\mathbb{K}, i,j\in\{1,\cdots,n\}} B_{i,j}(\lambda)$. Un élément de $\mathcal{S}_n$ distinct de $I_n$ est appelé une **matrice de transvection**.

On note $\mathcal{D}_n = \{D(\lambda) = diag(1, \cdots, 1, \lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}^*\}$. Un élément de $\mathcal{D}_n$ distinct de $I_n$ est appelé une **matrice de dilatation**.

**i-** Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, $i \neq j$. Montrer que $B_{i,j}(\lambda)$ est semblable à $B_{i,j}(1)$.

**ii-** Soit $M \in Gl_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $S_1, \cdots, S_p \in \mathcal{S}_n$, $D \in \mathcal{D}_n$ telles que :

$$M = D(\lambda) \cdot S_1 \cdot \cdots \cdot S_n$$

(*ind. Remarquer que nécessairement* $\lambda = \det(M)$, *ce qui permet de se ramener au cas où* $\det(M) = 1$. *Raisonner ensuite par récurrence sur la taille de* $M$ *en se ramenant à une matrice du type :* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & M' \end{pmatrix}$ *par multiplication de* $M$ *à droite par des matrices de transvection.*)

**iii-** Montrer que $Gl_n(\mathbb{K})$ est engendré (en tant que groupe multiplicatif) par $I_n$ et les matrices de dilatation et de transvection.

**iv-** Montrer que $Sl_n(\mathbb{K})$ est engendré (en tant que groupe multiplicatif) par $I_n$ et les matrices de transvection.

**iv-** Montrer à nouveau, grâce à **iii**, que $Gl_n(\mathbb{K})$ est connexe. Montrer que $Sl_n(\mathbb{K})$ est un fermé connexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**v-** Montrer que $Gl_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes qui sont $Gl_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in Gl_n(\mathbb{R}), \det(M) < 0\}$ et $Gl_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in Gl_n(\mathbb{R}), \det(M) > 0\}$ (*ind. Montrer que toute matrice de* $Gl_n^+(\mathbb{R})$ *peut-être jointe dans* $Gl_n^+(\mathbb{R})$ *par un chemin continu à une matrice de* $Sl_n(\mathbb{R})$, *puis utiliser* **iv**).