Opérations sur les lignes et les colonnes

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif et n un entier naturel.

Notations. — On note classiquement les groupes linéaire et spécial linéaire de $\mathbb{K}^n$ respectivement par $Gl_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); \det(M) \neq 0\}$ et $SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); \det(M) = 1\}$.

• Soit pour $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, $i \neq j$, $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant tous ses coefficients nuls sauf celui situé sur la ligne i et la colonne j, celui-ci étant égal à 1. Les $(E_{i,j})_{i,j\in\{1,\cdots,n\}}$ forment la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• Soit pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda \cdot E_{i,j}$ et $\mathcal{T}_n = \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\mathbb{K}, i,j\in\{1,\cdots,n\}} T_{i,j}(\lambda)$. Un élément de $\mathcal{T}_n$ distinct de I_n est appelé une **matrice de transvection**.

• On note $D(\lambda) = I_n + (\lambda - 1).E_{i,i}$ et $\mathcal{D}_n = \{D(\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}^*\}$. Un élément de $\mathcal{D}_n$ distinct de I_n est appelé une **matrice de dilatation**.

• Soit pour $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, $i \neq j$, $P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$. $P_{i,j}$ est appelée une **matrice de permutation** .

1- Méthode du pivot de Gauss.

1-a. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que la multiplication de M à gauche par une matrice de transvection, de dilatation ou de transposition correspond à une certaine opération sur les lignes de M.

Montrer que la multiplication de M à droite par une matrice de transvection, de dilatation ou de transposition correspond à une certaine opération sur les colonnes de M.

1-b. Soit r le rang de M. Montrer qu'il existe deux suites finies $U_1, \cdots, U_m$ et $V_1, \cdots, V_p$ de matrices de transvection et de permutation et des réels non nuls $c_1, \cdots, c_r$ tels que :

$$M \cdot V_1 \cdots V_p = U_1 \cdots U_m \cdot M = \left(\begin{array}{cccccccc}
0\cdots0 & c_1 & *\cdots* & 0 & * & \cdots & \cdots & * \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & c_2 & * & \cdots & \cdots & * \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & * \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0\cdots0 & & 0 & 0 & \cdots & * & 0 & *\cdots* \\
0\cdots0 & & & \cdots & & 0 & c_r & *\cdots* \\
0\cdots0 & & & \cdots & & & 0 & 0\cdots0 \\
\vdots & & & \cdots & & & \vdots & \vdots \\
0\cdots0 & & & \cdots & & & 0 & 0\cdots0
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ \\
\text{—— ligne } r \\
\\ \\ \\
\end{array}$$

En déduire une méthode pour calculer le rang d'une matrice.

1-c. Soit :

$$T = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

la matrice de la question précédente, et k le nombre de permutations dans la suite $U_1, \cdots, U_m$, q le nombre de permutations dans la suite $V_1, \cdots, V_p$. Montrer que :

$$\det(M) = (-1)^k d_1 \cdots d_n = (-1)^q d_1 \cdots d_n$$

En déduire une méthode de calcul de $\det(M)$.

1-d. Soit $M \in Gl_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe deux suites finies $U_1, \cdots, U_m$ et $V_1, \cdots, V_p$ de matrices de dilatation, de transvection et de permutation telles que :

$$M \cdot V_1 \cdots V_p = U_1 \cdots U_m \cdot M = I_n$$

En déduire une méthode pour calculer M^{-1}.

2- Étude de $Gl_n(\mathbb{K})$ et de $Sl_n(\mathbb{K})$.

2-a. Soit $M \in Gl_n(\mathbb{K})$. On veut montrer qu'il existe $T_1, \cdots, T_p \in \mathcal{T}_n$, $D = diag(1, \cdots, 1, \lambda) \in \mathcal{D}_n$ telles que :

$$M = D \cdot T_1 \cdot \cdots \cdot T_p$$

2-a-i. Remarquer que l'on peut se ramener au cas où $\det(M) = 1$, quitte à considérer, au lieu de M, $M' = diag(1, \cdots, 1, 1/\det(M)).M$.

2-a-ii. On raisonne ensuite par récurrence sur la taille de M. Pour cela, montrer qu'il existe des matrices de transvection $T_1, \cdots, T_m \in \mathcal{T}_n$ telle que :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & M' \end{pmatrix} .T_1 \cdots T_m,$$

et que $M' \in Sl_{n-1}(\mathbb{K})$.

2-b. Montrer que $Gl_n(\mathbb{K})$ est engendré (en tant que groupe multiplicatif) par les matrices de dilatation et de transvection.

2-c. Montrer que $Sl_n(\mathbb{K})$ est engendré (en tant que groupe multiplicatif) par les matrices de transvection.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la topologie issue d'une norme quelconque sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2-d. Montrer, grâce à **2-b**, que $Sl_n(\mathbb{K})$ est un fermé connexe par arcs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $Gl_n(\mathbb{C})$ est un ouvert connexe par arcs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2-e. Montrer que $Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui possède deux composantes connexes qui sont $Gl_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in Gl_n(\mathbb{R}), \det(M) < 0\}$ et $Gl_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in Gl_n(\mathbb{R}), \det(M) > 0\}$ (*ind. Montrer que $Gl_n^+(\mathbb{R})$ et $Gl_n^-(\mathbb{R})$ sont homéomorphes, puis que $Gl_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs*).

2-f. Soit $a \in \mathbb{K}^*$. Montrer que $Sl_n(\mathbb{K})$ et $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); \det(M) = a\}$ sont homéomorphes.

2-g. Représenter $Sl_1(\mathbb{K})$ et $Gl_1(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$.

Autre thème. Décomposition $L.U$ et résolution de systèmes linéaires.