# Matrices équivalentes, matrices semblables   21 oct 04

## 1) Matrices équivalentes

$A$ anneau (unitaire) commutatif, $M_{n,p}(A)$ anneau des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes à coef. dans $A$, $Gl_n(A)$ groupe des él$^{ts}$ inversibles de $M_n(A)$ pour la multiplication

<u>Def</u> $M, N \in M_{n,p}(A)$ sont équivalentes s'il existe $P \in Gl_n(A)$, $Q \in Gl_p(A)$ tq $N = PMQ$
relation d'équivalence

Interprétation en terme de matrice d'un appl d'un ev de dim $p$ dans un ev de dim $n$

<u>Ex</u> la classe de $0$ est $\{0\}$, celle d'un él$^t$ de $Gl_n(A)$ est $Gl_n(A)$

<u>Thm</u> Soit $A$ un corps (commutatif) Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont m̂ rang
toute matrice est équiv. à une matr. $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Algorithme : - $rg\, M$ = rg d'une matrice extraite inversible dont toutes les bordantes sont non inversibles $\rightsquigarrow$ utilisation des déterminants

- Opération sur les lignes et les colonnes

$\alpha \in A$, $M = (\ell_i) \in M_{n,p}(A)$ $\begin{pmatrix} \ell_i \\ \ell_j \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \ell_i \\ \ell_j + \alpha \ell_i \end{pmatrix}$ est la mult. à gauche par $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ \alpha & & 1 \end{pmatrix} \in Gl_n(A)$

$\begin{pmatrix} \ell_i \\ \ell_j \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \ell_j \\ \ell_i \end{pmatrix}$ est la mult. à g. par $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in Gl_n(A)$

$(\ell_i) \mapsto (\alpha \ell_i)$ ——— $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in Gl_n(A)$ si $\alpha \in A^\times$

$\rightsquigarrow$ algorithme du Pivot $O(\cancel{n^2})$ opération $O(n^3)$

$A$ anneau euclidien les algorithmes de Pivot et d'Euclide montrent qu'une matrice $M$ est équivalente à une matrice $\begin{pmatrix} d & 0 & \cdots \\ 0 & & \\ \vdots & & M' \end{pmatrix}$ avec $d \mid M'$

<u>Thm</u> $A$ anneau principal, toute matrice est équivalente à une matrice $\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & d_n \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ avec $d_1 \mid \cdots \mid d_n$

De plus $d_k$ = pgcd (mineurs d'ordre $k$)

## 2) Matrices semblables

<u>Def</u> $M, N \in M_n(A)$ semblables si $\exists P \in Gl_n(A)$ $N = PMP^{-1}$ (conjugaison de $Gl_n$)

Interprétation en terme de matrice d'une application linéaire dans une m̂ base

<u>Ex</u> $M = \alpha I_n$ sa classe est $\{\alpha I_n\}$

Polynôme caractéristique et valeurs propres

<u>Prop 1</u> $\chi_M = \det(-M + X I_n) \in A[X]$ est un invariant de similitude

On suppose ~~dès~~ $A$ corps

Prop $M$ est semblable à une matrice triangulaire $\Leftrightarrow \chi_M$ est scindé

Prop $\chi_M = PQ$ avec $P \wedge Q = 1$ $\Rightarrow$ $M$ est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$ avec $\chi_{M_1} = P$, $\chi_{M_2} = Q$

réciproquement <rerédiger cette prop>

$\chi_M = P^k \Rightarrow M$ est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} M' & * \\ & \ddots \\ & & M' \end{pmatrix}$ avec $\chi_{M'} = P$

Polynôme minimal : $m_M$ générateur unitaire de l'idéal des polynômes annulateurs de $M$

Prop $M$ est semblable à une matrice diagonale $\Leftrightarrow m_M$ est scindé à racines simples

~~Réduction des endomorphismes nilpotents~~

Rq réduction des matrices symétriques, orthogonales, hermitiennes, normales

Retour sur la prop 1 ($A$ = corps)

$u$ endomorphisme de $A^n$ associé à $M$   $u$ est dit cyclique si $\exists x \in A^n$, $\{x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\}$ base de $A^n$

<u>Prop</u> Supposons $u$ cyclique alors une matrice est semblable à $M$ ssi elle a m̂ polyn. caractéristique

$\rightsquigarrow$ réduction des endomorphismes nilpotents puis réduction de Jordan

## 3) Lien entre les deux notions

$M, N$ semblables $\Rightarrow M, N$ nilpotente

$u : A^n \to A^n$ peut être vu comme une structure de $A[X]$-module sur $A^n$

$\rightsquigarrow$ présentation $\quad (A[X])^n \xrightarrow{} (A[X])^n \to A^n$

de matrice $XI_n - M$ ds la base canonique

Prop $M, N$ sont semblables ~~ssi~~ $\iff$ les structures de $A[X]$-module sur $A^n$ ~~sont~~ isomorphes

$\iff$ les matrices $XI_n - M$ et $XI_n - N$ sont équivalentes ds $M_n(A[X])$

(algèbre homologique)

Si $A$ est un corps, $A[X]$ est principal $\rightsquigarrow$ facteurs invariants