Préparation à l'agrégation — Panorama Géométrie affine — 10 décembre 2004

Ref : Fresnel, Berger, les références pour la géométrie du 1er cycle

- Espace affine : c'est un triplet $(X, E, X\times X \to E)$ où X est un ensemble, E un espace vectoriel sur un corps k et $X\times X \to E$ est une application notée $(M,N) \mapsto \overrightarrow{MN}$

vérifiant $\forall M,N,P \in X$, $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ (relation de Chasles)

$\forall M \in X$, $N \mapsto \overrightarrow{MN}$ est une bijection $X \to E$. On note alors, pour $u \in E$, $M+u$ l'unique point N tq $\overrightarrow{MN} = u$

De façon équivalente un espace affine est la donnée d'une action simplement transitive d'un k-ev E sur un ensemble X

E s'appelle la direction de X, notée $\vec{X}$. On appelle dimension de X la dimension de E

Sous espace affine : $F \subset X$ vérifiant $\forall M \in F$, $\{\overrightarrow{MN}, N \in F\}$ est un sous espace vectoriel de E. C'est alors naturellement un espace affine de direction $\{\overrightarrow{MN}, M,N \in F\}$ si F est non vide. Deux sous espaces affines sont dits parallèles s'ils ont même direction. Plus généralt $F /\!/ \text{à } G$ si $\vec{F} \subset \vec{G}$.

Exemples : - sous espace affine $\neq \emptyset$ d'un ev E : c'est une partie de la forme $A+F$ avec F ss esp. vectoriel de E et $A \in E$ (ss espace affine passant par A de direction F.

- point = espace affine de dim 0, droite = espace affine de dim 1, plan = — de dim 2
- hyperplan = sous espace affine de codimension 1

Vecteur directeur d'une droite : c'est une base de la direction de la droite ⇝ mesure algébrique sur la droite relativemt à un vecteur directeur u : $\overline{MN} \in k$ caractérisé par $\overrightarrow{MN} = \overline{MN}\, u$ (cf coordonnées)

- Application affine : $f\ X \to Y$, entre espaces affines sur un même corps k, vérifiant $\exists \varphi\ \vec{X} \to \vec{Y}$ linéaire tq $\forall M,N \in X$, $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{MN})$

φ s'appelle la partie linéaire de f

Ptés $f \mapsto \varphi$ respecte la composition des applications. f est bijective $\Leftrightarrow$ φ est bijective

Une application affine respecte l'alignement. Réciproquement une bijection qui respecte l'alignement est "presque" affine (voir [Berger])

Une application affine transforme un ss esp. affine en un ss esp. affine et respecte le parallélisme.

L'image réciproque d'un ss esp affine par une appl. affine est un ss esp. affine

Exemples translation de vecteur u : $M \mapsto M+u$, $X \to X$

homothéties de centre A de rapport $a \neq 0$: $M \mapsto A + a\overrightarrow{AM}$

<u>Prop 1</u> $f\ X \to X$ application affine. f est une homothétie $\neq \mathrm{Id}$ ~~ou une translation~~ ssi sa partie linéaire est $\lambda.\mathrm{Id}$ pour un $\lambda \in k\setminus\{0,1\}$

f est constante ssi sa partie linéaire est nulle

f est une translation ssi sa partie linéaire est Id

Cor L'ensemble des homothéties et des translations forme un groupe pour la composition

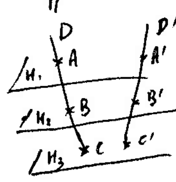
<u>Prop 2</u> $f\ X \to X$ bijection avec $\dim X \geq 2$. Alors f est une homothétie ou une translation (en particulier est affine) ssi $\forall D$ droite de X, $f(D)$ est une droite parallèle à D

Autres exemples : Soit $F \subset X$ ss espace affine non vide et $\vec{G}$ un supplémentaire de $\vec{F}$ dans $\vec{X}$

⇝ projection ~~dans X~~ sur F parallèlement à $\vec{G}$, symétrie par rapport à F parallèlement à $\vec{G}$, affinité de base F parallèlement à $\vec{G}$ de rapport a.

Classification des applications affines entre deux droites : Une telle application est soit constante soit bijective. Une bijection $D \to D'$ est affine ssi elle préserve le rapport des mesures algébriques.

<u>Thm 3</u> (Thalès)



D, D' deux droites, H_1, H_2, H_3 trois hyperplans parallèles entre eux, A, B, C, A', B', C' les pts d'intersection de H_1, H_2, H_3 avec D et D'

Alors $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$

Réciproque lorsque $A = A'$. Lien avec les homothéties.

- Repère cartésien de X : $(O, e_1, -, e_n)$ où $O \in X$ et $(e_1, -, e_n)$ base de $\vec{X}$. $M \in X$ est de coord (x_i) ds ce repère si $\vec{OM} = \sum x_i e_i$

  ⇝ expression matricielle d'une application affine $f : X \to Y$ relativement à des repères de X et Y

  $f(M) = f(O) + \varphi(\vec{OM})$ ...

  Recherche de point fixe pour $f : X \to X$: $\{M \in X, f(M) = M\}$ est un sous espace affine qui est soit $\emptyset$ soit de direction $\mathrm{Ker}(\varphi - Id)$

  Prop 4 Si $f\ X \to X$ appl affine de partie linéaire φ. Si X est de dim finie et 1 n'est pas valeur propre de φ alors f admet exactement un point fixe.

  Repère affine : $(A_0, -, A_n) \in X^{n+1}$ tq $(A_0, \vec{A_0A_1}, -, \vec{A_0A_n})$ soit un repère cartésien de X

  Pté universelle 5 : Soient X et Y deux espaces affines sur un même corps et, $(A_0, - A_n)$ un repère affine de X et $(B_0, -, B_n)$ une famille de $n+1$ points de Y. Il existe une et une seule application affine f telle que $f(A_i) = B_i$

- Equation cartésienne d'un hyperplan

  $H \subset X$ est un hyperplan $\Leftrightarrow$ $\exists A \in H$ et $f : \vec{X} \to k$ forme linéaire non nulle tels que $H = \{M \in X, f(\vec{AM}) = 0\}$

  Dans un repère $(O, e_1, -, e_n)$ (si X est de dim finie n) Si M est de coordonnées (x_i) et A de coord (x_{Ai}), l'équation $f(\vec{AM}) = 0$ s'écrit $f(\vec{OM}) = f(\vec{OA})$ soit $\sum x_i f(e_i) = \sum x_{Ai} f(e_i)$ eq. cartésienne de H ds le repère $(O, (e_i))$

  Inversement si $(a_i) \in k^n \setminus \{(0, -, 0)\}$ et $a \in k$, $\sum x_i a_i = a$ est l'équation d'un hyperplan de X

  (6) Soit $F \subset X$ sous espace affine non vide de dim k avec X de dim n. Soit $A \in F$. Alors il existe $f_1, --, f_{n-k}$ $n-k$ formes linéaires linéairement indépendantes telles que $F = \{M \in X, f_1(\vec{AM}) = \dots = f_{n-k}(\vec{AM}) = 0\}$. On dit que $f_1(\vec{AM}) = 0, \dots, f_{n-k}(\vec{AM}) = 0$ est un système d'équations de F

  Prop 7 Soit ~~E_n~~ X espace affine de dim n, $f_1, -, f_k$ k formes linéaires linéairement indépendantes $\vec{X} \to k$ et $a_1, -, a_k$ des élts de $\mathbb{R}$

  Soit $O \in X$. L'ensemble $\{M \in X, f_1(\vec{OM}) = a_1, \dots, f_k(\vec{OM}) = a_k\}$ est un ss espace affine non vide de dim $n-k$

  Il faut connaître : dualité en algèbre linéaire, pivot de Gauss.

- Problèmes d'intersection ⇝ lien avec l'enseignement axiomatique de la géométrie

  Deux sous-espaces affines parallèles (ie de m̂ direction) sont disjoints ou confondus.

  Dans le plan deux droites sont parallèles ou s'intersectent en exactement un point (on dit alors qu'elles sont sécantes). Plus généralt :

  Prop 8 Soient $F, G \subset X$ deux sous espaces affines tels que $\vec{X} = \vec{F} \oplus \vec{G}$ alors $F \cap G$ est un singleton.

  Si $\vec{X} = \vec{F} + \vec{G}$ alors $F \cap G$ est non vide, de direction $\vec{F} \cap \vec{G}$

  (9) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ deux plans sont parallèles ou s'intersectent suivant une droite

- Barycentres

  $A_1, -, A_n \in X$; $\alpha_1, -, \alpha_n \in \mathbb{R}$ On étudie $X \to \vec{X}$, $M \mapsto \sum \alpha_i \vec{MA_i}$

  Ptés du barycentre : (9) transitivité

  (10) Une application $X \to Y$ est affine ssi elle conserve les barycentres de tout système de points pondérés

  Sous espace affine engendré par $A_1, -, A_n$ = ensemble des barycentres des A_i

  Repères affines et coordonnées barycentriques [lien avec le complété projectif d'un espace affine]

  Indépendances affine de $n+1$ points dans un espace affine de dim n et déterminant.

  Convexité dans les espaces affines réels

- Quelques résultats d'alignement. (11) Menelaüs, (12) Ceva, (13) Papus, (14) Desargues

  Isobarycentre d'un triangle.