Préparation à l'Agrégation 2005 U.N.S.A. 2004-2005

Algèbre. Feuille d'exercices n° 2. Polynômes à plusieurs variables.

On désigne par k un corps et par $X_1, \dots, X_n$; X, Y des indéterminées.

I] Soit $f, g \in k[X_1, \dots, X_n]$. Prouver que $f \cdot g$ homogène $\Leftrightarrow$ f, g homogènes.

II] Pour quels corps k a-t-on un isomorphisme d'anneaux

$$k[X,Y]/(Y-X^2) \simeq k[X,Y]/(Y^2-X^2) \ ?$$

III] Soit A une $\mathbb{Q}$-algèbre. Calculer les polynômes symétriques élémentaires $s_1, s_2, s_3 \in A[X_1, X_2, X_3]$ en fonction des polynômes de Newton p_1, p_2, p_3 (où $p_i(X_1, X_2, X_3) = X_1^i + X_2^i + X_3^i$). [Réponse : $s_1 = p_1$, $s_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2)$, $s_3 = \frac{1}{3}p_3 - \frac{1}{2}p_1 p_2 + \frac{1}{6}p_1^3$]

IV] Soit $x, y, z \in \mathbb{C}$ avec $x+y+z=1$, $x^2+y^2+z^2=2$ et $x^3+y^3+z^3=3$. Prouver que $x, y, z \notin \mathbb{Q}$ mais que $x^n + y^n + z^n \in \mathbb{Q}$ $(n=1,2,3,4,\dots)$.

V] Soit $A \in M_n(k)$ une matrice à coefficients dans le corps k de caractéristique nulle. Prouver que si les traces $Tr(A) = Tr(A^2) = Tr(A^3) = \dots = 0$ sont toutes nulles, alors A est nilpotente. <u>Généralisation</u> : si $A, B \in M_n(k)$ et si $Tr(A^k) = Tr(B^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ alors les polynômes caractéristiques χ_A et χ_B sont égaux. Que se passe-t-il si car $k \neq 0$?