Algèbre : Feuille d'exercices n°5. Anneaux.

On désigne par A et B des anneaux commutatifs.

I] Prouver que tout idéal de $A \times B$ s'écrit $I \times J$ (avec $I \subset A$ et $J \subset B$ des idéaux).

II] Quels sont les idéaux premiers (resp. maximaux) des anneaux $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{C}[\varepsilon] := \frac{\mathbb{C}[X]}{(X^2)}$, $\mathbb{C}[X,Y]/(X \cdot Y)$, $\mathbb{C}[X]/(X^n - 1)$?

III] L'ensemble $\mathrm{Hom}_{\text{anneaux}}(A, B)$ est-il naturellement muni d'une structure de groupe abélien ? d'anneau ? peut-il être vide ?

IV] Soit B une A-algèbre

a) Expliquer la bijection $\mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(A[X_1, \dots, X_n], B) \to B^n$
$\varphi \mapsto (\varphi(X_1), \dots, \varphi(X_n))$

ainsi que son inverse

$B^n \to \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(A[X_1, \dots, X_n], B) : (b_1, \dots, b_n) \mapsto ev_{b_1, \dots, b_n}$

On écrit, bien sûr, $ev_{b_1, \dots, b_n}(P(X_1, \dots, X_n)) = P(b_1, \dots, b_n)$

b) Si $u : B \to C$ est un morphisme de A-algèbres, prouver que $u(P(b_1, \dots, b_n)) = P(u(b_1), \dots, u(b_n))$

V] Soit k un corps et E un k-esp. vectoriel de dimension finie. Démontrer que si $u \in \mathrm{End}(E)$ a pour polynôme minimal $\mu_u(X)$, on a un isomorphisme de k-algèbres $k[X]/(\mu_u(X)) \xrightarrow{\sim} k[u]$. En déduire que si u est scindé à racines simples, alors $k[u] \simeq k \times \dots \times k$.