Préparation à l'Agrégation 2005 UNSA 2004-2005

Algèbre : Feuille d'exercices n° 4

I] Si K est un corps infini (par exemple parce qu'il est algébriquement clos) prouver que si $f(x_1,\dots,x_n)\in K[x_1,\dots,x_n]$ vérifie $f(a)=0$ pour tout $a=(a_1,\dots,a_n)\in K^n$, alors $f=0$.

II] Le lemme de Study : un ancêtre du Nullstellensatz.

Soit $f,g\in K[X,Y]$ où K est un corps algébriquement clos. On suppose f irréductible. On suppose que g est nul en tout zéro de f i.e. $\forall (a,b)\in K^2$, $f(a,b)=0 \Rightarrow g(a,b)=0$. Alors f divise g dans $K[X,Y]$ ("Lemme de Study").

a) Comme f est irréductible, il n'est pas constant. On peut supposer $f(X,Y)=a_0(X)Y^p+\dots+a_p(X)\in K[X][Y]=A[Y]$ avec $p>0$. Prouver alors que si $g(X,Y)=b_0(X)Y^q+\dots+b_q(X)\in A[Y]$ on a forcément $q>0$ si $g\neq 0$, ce qu'on suppose désormais.

b) Prouver que si $x\in K$ vérifie $a_0(x)\neq 0$ et $b_0(x)\neq 0$ alors il existe $y\in K$ avec $f(x,y)=g(x,y)=0$.

c) En déduire que $\mathrm{Res}(f(x,Y),g(x,Y))=0$, puis que $\mathrm{Res}(f_X,g_X)\in A=K[X]$ est nul. (On a posé $f_X(Y)=f(X,Y)$ et $g_X(Y)=g(X,Y)$)

d) Conclure que f et g ont un facteur commun, qui est f.