Préparation à l'Agrégation 2005 UNSA : 2004-2005

Algèbre feuille d'exercices n° 6 : corps

I] Justifier le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) & \\
\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[ur, dash, "2"] & \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \arrow[u, dash, "2"] & \mathbb{Q}(\sqrt{6}) \arrow[ul, dash, "2"'] \\
 & \mathbb{Q} \arrow[ul, dash, "2"] \arrow[u, dash, "2"] \arrow[ur, dash, "2"'] &
\end{tikzcd}$$

II] On pose $\alpha = \frac{2\pi}{5}$ et $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{5}} = e^{i\alpha}$.

a) Rappeler pourquoi $Irr(\zeta,\mathbb{Q},X) = X^4+X^3+X^2+X+1 = (X-\zeta)(X-\zeta^2)(X-\zeta^3)(X-\zeta^4)$.

b) Vérifier que $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}(\cos\alpha) \subsetneq \mathbb{Q}(\zeta)$. Calculer

$Irr(\zeta, \mathbb{Q}(\cos\alpha), X)$ et $Irr(2\cos\alpha, \mathbb{Q}, X)$

[Rép : $X^2 - 2\cos\alpha\, X + 1$ et $(X-(\zeta+\frac{1}{\zeta}))(X-(\zeta^2+\frac{1}{\zeta^2})) = X^2+X-1$]

c) En déduire $\cos\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

Étonnant, n'est-ce pas ?

d) Prouver que $Irr(2\sin\alpha, \mathbb{Q}, X) = X^4 - 5X^2 + 5$

En déduire $\sin\alpha \notin \mathbb{Q}(\zeta)$, bien que $i\sin\alpha \in \mathbb{Q}(\zeta)$.

Ainsi $i \notin \mathbb{Q}(\zeta)$.

e) Synthèse : (à justifier)

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}(\zeta i) = \mathbb{Q}(\sin\alpha, i) & & \\
\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(i\sin\alpha) \arrow[ur, dash, "2"] & & \mathbb{Q}(\sin\alpha) \arrow[ul, dash, "2"'] & \\
\mathbb{Q}(\cos\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \arrow[u, dash, "2"] \arrow[urr, dash, "2"'] & & & \mathbb{Q}(i) \arrow[uull, dash, "4"'] \\
\mathbb{Q} \arrow[u, dash, "2"] \arrow[urrr, dash, "2"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Test : Calculer $Irr(\sin\alpha, \mathbb{Q}(\cos\alpha), X)$ et $Irr(2\sin\alpha, \mathbb{Q}(i), X)$.