

Algèbre feuille d'exercices n° 6 : cnts

I] Justifier le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \\
 & & & & \uparrow \\
 & & & & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \quad \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \quad \mathbb{Q}(\sqrt{6}) \\
 & & & & \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 & & & & \mathbb{Q}
 \end{array}$$

II] On pose $\alpha = \frac{2\pi}{5}$ et $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{5}} = e^{i\alpha}$.

a) Prouver pour \mathbb{Q} $\text{Irr}(\zeta, \mathbb{Q}, X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = (X-\zeta)(X-\zeta^2)(X-\zeta^3)(X-\zeta^4)$.

b) Vérifier que $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}(\cos \alpha) \subsetneq \mathbb{Q}(\zeta)$. Calculer

$\text{Irr}(\zeta, \mathbb{Q}(\cos \alpha), X)$ et $\text{Irr}(2\cos \alpha, \mathbb{Q}, X)$

[Rép: $X^2 - 2\cos \alpha X + 1$ et $(X - (\zeta + \zeta^4))(X - (\zeta^2 + \zeta^3)) = X^2 + X - 1$]

c) En déduire $\cos \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ et $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$

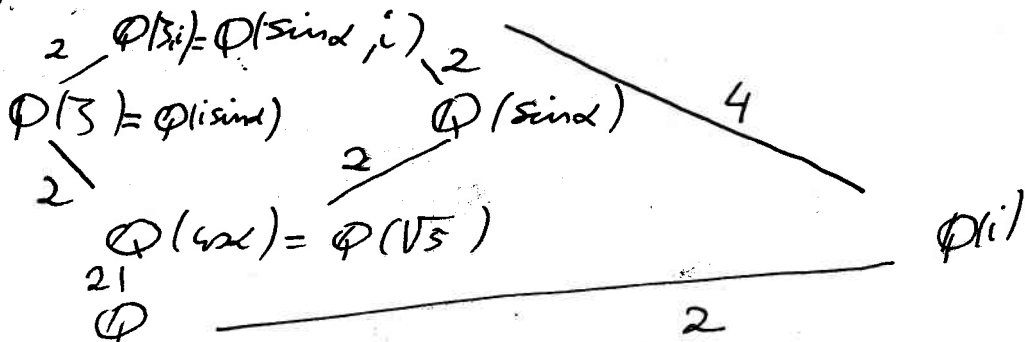
Etonnant, n'est-ce pas ?

d) Prouver que $\text{Irr}(2\sin \alpha, \mathbb{Q}, X) = X^4 - 5X^2 + 5$

En déduire $\sin \alpha \notin \mathbb{Q}(\zeta)$, bien que $i\sin \alpha \in \mathbb{Q}(\zeta)$.

Ainsi $i \notin \mathbb{Q}(\zeta)$.

e) Synthèse :
(à justifier)



Test: Calculer $\text{Irr}(\sin \alpha, \mathbb{Q}(\cos \alpha), X)$ et $\text{Irr}(2\sin \alpha, \mathbb{Q}(i), X)$.