Préparation à l'Agrégation 2005 U.N.S.A. 2004-2005

Algèbre : Feuille d'exercices n°1. Polynômes à une variable

I] Division euclidienne dans $\mathbb{Q}[X]$ de $f(X)=6X^4-6X^3+3X^2-3X+1$ par $g(X)=2X^2+1$. Division de $\bar{f}(X)$ par $\bar{g}(X)$ dans $\mathbb{F}_5[X]$. Mêmes questions pour X^3+X^2+1 et $2X^2+X+1$

II] Soit $k\subset K$ une extension de corps et $f,g\in k[X]$. Prouver que le pgcd de f et g calculé dans $k[X]$ est le même que celui calculé dans $K[X]$

III] Calculer le pgcd de X^4 et X^2+2 dans $\mathbb{Q}[X]$ et dans $\mathbb{F}_2[X]$.

IV] Si k est un corps, $k[X]$ contient une infinité de polynômes irréductibles unitaires.

V] Si k est un corps, calculer le p.g.c.d. $\delta(X)$ de X^m-1 et X^n-1 $(m,n\in\mathbb{N}^*)$ dans $k[X]$ [Indic : calculer dans $\dfrac{k[X]}{(\delta(X))}$].

VI] $\mathbb{Q}[X]$ possède des polynômes irréductibles de tout degré >0.

VII] Décomposer X^4+1 en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$.

VIII] Trouver un générateur de chacun des idéaux suivants

$I=\{f\in\mathbb{Q}[X] \mid f(i)=0\}$ $J=\{f\in\mathbb{Q}[X] \mid f(i\sqrt{2})=0\}$

$K=\{f\in\mathbb{R}[X] \mid f(i\sqrt{2})=0\}$.

IX] Quels sont les idéaux maximaux des anneaux suivants? $\dfrac{\mathbb{R}[X]}{(X^2-3X+2)}$, $\dfrac{\mathbb{R}[X]}{(X^2+X+1)}$, $\dfrac{\mathbb{R}[X]}{(X^2+X-1)}$