Feuille n° 8 d'Algèbre : Matrices de GRAM

On fixe un espace vectoriel euclidien $V, \langle , \rangle$ de dim. n

I] Pour une suite $\mathcal{V}=(v_1,\dots,v_p)$ de vecteurs $v_i \in V$, on définit la matrice de Gram

$$G = G(\mathcal{V}) = \boxed{G(v_1,\dots,v_p) := (\langle v_i, v_j\rangle)} \in M_p(\mathbb{R})$$

(on ne suppose PAS p libre, ni $p \leq n$).

Prouver que si $v'_j = \sum_{\alpha=1}^{p} P_{\alpha j} v_\alpha$ et $\mathcal{V}' := (v'_1, \dots, v'_p)$, on a

$$\boxed{G(\mathcal{V}') = {}^tP\, G(\mathcal{V})\, P} \qquad (*)$$

En déduire que si $v'_1 = \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha v_\alpha$ et $v'_i = v_i$ pour $2 \leq i \leq p$,

on a $\det G(\mathcal{V}') = \lambda_1^2 \det G(\mathcal{V})$.

En déduire $\mathcal{V}$ liée $\Rightarrow \det G(\mathcal{V}) = 0$.

II] Si $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base ORTHONORMÉE de V et si on écrit les e_i dans cette base : $v_j = \sum X_{\alpha j} e_\alpha$, on a

$$\boxed{G(\mathcal{V}) = {}^tX . X} \qquad (X = (x_{\alpha\beta}) \in M_{n \times p}(\mathbb{R}))$$

III] Prouver que si $\mathcal{V}$ est libre $\det G(\mathcal{V}) > 0$.

(On pourra choisir une base orthonormée $\mathcal{E}$ de vect$(\mathcal{V})$ et utiliser $(*)$)

En résumé : $\boxed{\det(\text{Gram}\, \mathcal{V}) \geq 0 \text{ et } \det(\text{Gram}\, \mathcal{V}) > 0 \Leftrightarrow \mathcal{V} \text{ libre.}}$

pour toute suite $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_p)$ de vecteurs de V

Feuille n° 8 bis d'Algèbre : Matrices de Gram (suite).

IV] On se propose de montrer que si $L \subset V$ est un sous-espace de base $(v_1, \dots, v_p) = \mathcal{V}$ et si $v \in E$ est un vecteur, la distance $d(v, L)$ est donnée par

$$\boxed{d^2(v, L) = \frac{\det \mathrm{Gram}(v_1, \dots, v_p, v)}{\det \mathrm{Gram}(v_1, \dots, v_p)} \qquad \text{(DIST)}}$$

a] Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base ORTHONORMÉE de L.

Alors $\quad d(v, L) = \| v - \sum_{j=1}^{p} \langle e_j, v \rangle e_j \|$

et $\quad d^2(v, L) = \|v\|^2 - \sum_{j=1}^{p} \langle e_j, v \rangle^2$.

b) En déduire (**DIST**) lorsque $\mathcal{E} = \mathcal{V}$ est une base orthonormée.

[Indic : $\left| \begin{array}{c|c} I_p & \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{matrix} \\ \hline a_1 \cdots a_p & b \end{array} \right| = b - \sum a_i^2$: remplacer Col^{p+1} ms $\mathrm{Col}^{p+1} - \sum_{j=1}^{p} a_j \mathrm{Col}^j$

c] Prouver le cas général de (DIST)

[Indic : utiliser (*) en reliant la matrice de changement de base P $(e_1, \dots, e_p \to v_1, \dots, v_p)$ à la matrice de changement de base $\tilde{P}$ $(e_1, \dots, e_p, v \to v_1, \dots, v_p, v)$. On trouve $\tilde{P} = \left(\begin{array}{c|c} P & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \end{array} \right)$]

d] Adapter au cas affine euclidien : si $(P_0, \dots, P_p)$ est un repère affine de L, on a : $\quad d^2(Q, L) = \dfrac{\det \mathrm{Gram}(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_p}, \overrightarrow{P_0Q})}{\det \mathrm{Gram}(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_p})}$