Développements Limités

Exo 1: vite fait.
a- Donner un développement à l'ordre 2 de $(\cos(\frac{1}{n}))^{n+1}$ lorsque $n \to \infty$.
b- Equivalent de $u_n = \frac{1}{n!} + \frac{1}{n+1!} + \dots$ lorsque $n \to \infty$.
c- Equivalent de $\int_x^{\pi/2} \frac{\cos t}{t}\, dt$ lorsque $x \to 0$.

Exo 2: série harmonique. Notons $H_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$.
a- Montrer que $H_n \sim \log n$ lorsque $n \to \infty$.
b- Montrer qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que $H_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{2n})$.

Exo 3: solution d'une équation. Donner un développement à l'ordre 2 de la suite x_n définie par $x_n + \log x_n = n$.

Exo 4: équivalent de Raabe. Considérons une suite vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + a_n$$

avec $\sum |a_n| < \infty$.
a- Montrer que $\log u_{n+1} - \log u_n = \alpha/n + b_n$, avec $\sum |b_n| < \infty$.
b- Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$, tel que $\log u_n = \alpha \log n + \beta + o(1)$
c- En déduire un équivalent de u_n.

Exo 5: sous une intégrale. Soit $a > 0$ et f de classe C^2 sur $[0, a]$. Donner un développement à l'ordre 2 de

$$u_n = \int_0^a t^n f(t)\, dt.$$

Exo 6: suite définie par récurrence. Soit x_n la suite définie par $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = \arctan x_n$.
a- Chercher α tel que $x_{n+1}^\alpha - x_n^\alpha \to$ constante.
b- En déduire un équivalent de x_n lorsque $n \to \infty$.

Solutions:
Exo1: **a-** $1 - 1/2n - 1/2n^2 + O(1/n^3)$, **b-** $1/n!$, **c-** $-\log x$
Exo3: $x_n = n - \log n + \frac{\log n}{n} + o(\frac{\log n}{n})$
Exo5: $u_n = \frac{a^{n+1}}{n} f(a) - \frac{a^{n+1}}{n^2}(f(a) + af'(a)) + O\left(\frac{a^n}{n^3}\right)$
Exo6: $x_n \sim \sqrt{3/2n}$