Exercices de niveau premier cycle

1. Dénombrement. Déterminer le nombre d'applications injectives (resp. surjectives) d'un ensemble dans un autre.

2. Arithmétique. Montrer que $(a+b)^p$ est congru à a^p+b^p modulo p pour tout couple d'entiers (a,b) et tout nombre premier p.

3. Arithmétique. Le but de cet exercice est de déterminer toutes les solutions de l'équation diophantienne $x^2+y^2=z^2$ en les nombres entiers naturels non nuls x,y,z. [1]

- Montrer qu'il suffit de résoudre le problème lorsque x,y,z sont premiers entre eux dans leur ensemble. On se place dorénavant sous cette hypothèse.
- Montrer qu'alors z est impair, et qu'exactement l'un des nombres x,y est pair. Montrer qu'il suffit de résoudre le problème lorsque y est pair, ce que l'on suppose vrai.
- Soit p un nombre premier divisant x. Montrer que p^2 divise soit $z-y$, soit $z+y$. En déduire que $z-y$ et $z+y$ sont des carrés impairs.
- Montrer que les solutions x,y,z de l'équation $x^2+y^2=z^2$ sont classifiées, à permutation près de x et y, par les triplets d'entiers (a,b,c), avec a et b impairs et premiers entre eux.
- Peut-on prendre $x=13$? $z=13$? $z=15$?

4. Groupes. Montrer qu'un groupe isomorphe à un groupe cyclique (resp. abélien) est cyclique (resp. abélien). Montrer que tout groupe de cardinal premier est abélien.

5. Groupes. Montrer que les sous-groupes d'un groupe cycliques sont en bijection avec les diviseurs de l'ordre de ce groupe. Interprétation géométrique dans $\mathbb{C}$.

6. Anneaux. Soient A et B deux anneaux. Construire la structure d'anneau produit sur $A\times B$. Quels sont les idéaux de $A\times B$?

7. Anneaux. Montrer qu'un anneau intègre fini (resp. une algèbre intègre de dimension finie sur un corps) est un corps. Que dire de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, où n est un entier ? que dire de l'anneau $\mathbb{Q}[X]/(X^2+1)$? et de $\mathbb{Q}[X]/(X^2-1)$?

8. Anneaux. Soit A un anneau commutatif et a, b deux éléments de A vérifiant $a+b=1$, $a^2=a$, $b^2=b$ et $ab=0$. Montrer que aA et bA sont des sous-anneaux de A et que A est isomorphe au produit $aA\times bA$. En déduire un isomorphisme explicite entre $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. [2]

9. Polynômes. Soit K un corps et $P\in K[X]$. Montrer que $a\in K$ est racine de P si et seulement si $(X-a)$ divise P.

10. Polynômes. Calculer le pgcd et le ppcm des polynômes X^3-1 et X^2-3X+2. Déterminer une identité de Bézout pour ces deux polynômes.

11. Polynômes. Exprimer le polynôme symétrique $X_1^3+X_2^3+2X_1X_2$ en les deux variables X_1 et X_2 en fonction des polynômes symétriques élémentaires.

12. Fractions rationnelles. Soit $P\in\mathbb{C}[X]$. Montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des racines de P.

13. Fractions rationnelles. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les fractions rationnelles $(X^2+2)/(X^3-1)$ et $(X^2+2)/(X-1)^3$. Calculer les primitives des fonctions rationnelles correspondantes.

---

[1] De tels triplets sont dits pythagoriciens.

[2] On dit que a et b sont des idempotents orthogonaux. Cette notion généralise la notion de projecteur en algèbre linéaire.