Université de Nice Année 2004-2005
Préparation à l'Agrégation Externe de Mathématiques
Algèbre et Géométrie

Dualité

1. Soit E un espace vectoriel *quelconque*.

a) Montrer que toute droite de E admet un supplémentaire (appliquer le lemme de Zorn à l'ensemble des sous-espaces de E ne rencontrant pas cette droite).

b) En déduire que l'application canonique de E dans son bidual est injective.

c) Montrer par un raisonnement analogue que tout sous-espace de E est orthogonal de son orthogonal dans E^*.

2. Montrer que le dual de l'espace des polynômes $K^{(\mathbb{N})}$ est l'espace de suites $K^{\mathbb{N}}$.

3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

a) Montrer que l'application $F \mapsto F^\perp$ est une bijection décroissante de E dans E^*.

b) En déduire que pour toute famille $f, f_1, \ldots, f_k$ d'éléments de E^*, f est engendré par $f_1, \ldots, f_k$ si et seulement si $\cap_i \ker f_i \subset \ker f$

4. Soit E l'espace des polynômes de degré $\leq n-1$ sur K, et $a_1, \ldots, a_n$ des éléments distincts de K.

a) Montrer que $(P \mapsto P(a_i))_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E^*.

b) Soit $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de K. Montrer l'existence d'un unique polynôme[1] P, de degré $\leq n$, tels que $P(a_i) = b_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$.

c) Construire un procédé similaire d'interpolation faisant intervenir plus généralement des *dérivées*.

5. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

a) Montrer que si le polynôme caractéristique de u est scindé, alors celui de ${}^t u$ l'est aussi.

b) Montrer que le noyau de tout vecteur propre de ${}^t u$ est un hyperlan de E stable pour u.

c) En déduire le théorème de trigonalisation.

d) Montrer de la même manière le théorème de cotrigonalisation.

6. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K, u un endomorphisme nilpotent de E. Le but de cet exercice est de montrer l'existence d'une base de E sur laquelle la matrice de u est de Jordan, c.a.d dont tous les coefficients sont nuls, sauf éventuellement les coefficients sur-diagonaux, qui valent 0 ou 1.

a) Montrer que l'endomorphisme transposé de u est nilpotent de même indice de nilpotence ; soit k cet indice.

b) Soit x un élément de E tel que $u^{k-1}(x) \neq 0$. Montrer que la matrice de la restriction de u au sous-espace engendré par $(u^n(x))_{n \geq 0}$ sur une base adaptée est de Jordan. (Remarque : un exercice legèrement plus délicat consiste à montrer que c'est le cas pour tout $x \in E$.)

c) Montrer l'existence de $x \in E$ tel que $u^{k-1}(x) \neq 0$.

d) Montrer l'existence de d'une forme linéaire f sur E telle que $f \circ u^{k-1}(x) \neq 0$. Montrer que $E_f = \cap \ker_{i \geq 0} {}^t u^i(f)$ et $E_x = \sum_{i \geq 0} K u^i(x)$ sont stables par u et vérifient $E = E_f \oplus E_x$.

[1] Que l'on appelle polynôme d'interpolation de Lagrange.

e) En déduire que E se décompose en une somme directe de sous-espaces stables par u sur lesquel la restriction de u est nilpotente d'ordre maximal.

7. Le but de cet exercice est l'étude de l'espace $L^k(E, K)$ des formes k-multilinéaires sur l'espace vectoriel E de dimension finie n. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de E, de base duale $e_1^*, \ldots, e_n^*$.

a) Pour tout indice $(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k$, soit $f_{i_1,\ldots,i_k}\colon (x_1, \ldots, x_k) \mapsto e_{i_1}^*(x_1) \times \ldots \times e_{i_k}^*(x_k)$. Montrer que $(f_I)_{I \in \{1,\ldots,n\}^k}$ est une base de $L^k(E, K)$.

b) Déterminer une base du sous-espace de $L^k(E, K)$ des formes symétriques

c) Même question pour les formes antisymétriques.