Université de Nice | Année 2004-2005
Préparation à l'Agrégation Externe de Mathématiques
Algèbre et Géométrie

Notice d'emploi du panorama sur les formes quadratiques

1. Montrer que les définitions 1 et 3 sont équivalentes à la définition usuelle. Retrouver la formule de changement de base pour les formes bilinéaires en utilisant j_ϕ. Quelle est la matrice de i_ϕ ?

2. Montrer le lemme 2, établir les formules donnant les projections sur chacun des deux sous-espaces.

3. Montrer le lemme 4. Plus généralement, lorsque ϕ n'est pas supposée non-dégénérée, montrer les égalités $\dim F^\perp = \dim E - \dim F + \dim F \cap \ker \phi$ et ${F^\perp}^\perp = F + \ker \phi$. Illustrer par des exemples en dimension 3. En déduire le lemme 12.

4. Donner l'interprétation matricielle du lemme 5. Montrer qu'il ramène la classification des formes bilinéaires symétriques et antisymétriques à celle des formes non-dégénérées.

5. Montrer le théorème 6 par la méthode de Gramm-Schmidt. On procèdera par récurrence en concluant par l'exercice 8. En déduire les corollaires 7 et 8

6. Montrer que le théorème 9 est équivalent à l'énoncé : *si ϕ est alternée et non-dégénérée, alors il existe deux sous-espaces E_1 et E_2 de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, et telle que $i_{\phi|E_1} \colon E_1 \to E_2^*$ est bijective.* Le montrer en construisant e_k et e_{n+k} par récurrence sur k ; en déduire le corollaire 10.

7. Montrer le théorème 13 par la méthode dite des carrés de Gauss. Établir l'équivalence des théorèmes 6 et 13 (resp. des corollaires 7 et 14, resp. 8 et 14).

8. Montrer que la restriction de la forme polaire d'une forme quadratique à un sous-espace totalement isotrope pour cette forme est nulle.

9. Si q est non-dégénérée, montrer que la dimension d'un sous-espace totalement isotrope est inférieure à $\dim E/2$

10. Montrer le théorème 16. Pour la seconde assertion, on considèrera deux sous-espace totalement isotropes E_1 et E_2, et on montrera que la restriction de i_ϕ à E_1 est à valeurs dans le dual de $E_2/E_1 \cap E_2$ et on calculera son noyau si E_2 est totalement isotrope maximal.

11. En déduire le corollaire 17 et en donner une interprétation matricielle.

12. Prouver le corollaire 18 et l'illustrer par des exemples en dimension 3.