Université de Nice
Préparation à l'Agrégation Externe de Mathématiques
Algèbre et Géométrie

Année 2003-2004

Réduction des endomorphismes

Soit K un corps, n un entier naturel non nul, E un espace vectoriel de dimension n sur K et u un endomorphisme de E. On note $\phi\colon K[X] \to \mathrm{End}(E)$ le morphisme $P \mapsto P(u)$.

Le polynôme minimal

1. Montrer que ϕ est un morphisme d'algèbre et que son image est une sous-algèbre commutative de $\mathrm{End}(E)$.

2. Montrer que le noyau de ϕ est de codimension finie majorée par n^2. En déduire qu'il est non-vide ; soit μ un générateur de ce noyau.

Décomposition en sous-espace caractéristiques

3. Montrer que pour tout $P \in K[X]$, l'image et le noyau de $\phi(P)$ sont stables par u.

4. Énoncer et montrer le lemme des noyaux.

5. En déduire l'existence d'une famille de sous-espace $(E_P)_{P\in I}$ de E indexée par l'ensemble I des facteurs irréductibles de μ telle que $\oplus_{P\in I} E_P = E$ et telle que pour tout $P \in I$, E_P est stable sous P et $P(u)$ est nilpotent sur E_P, d'indice de nilpotence la multiplicité de P dans μ.

6. Si μ est à racines distinctes, en déduire que u est diagonalisable (Critère de diagonalisation).

7. Si μ est scindé, en déduire qu'il existe un endomorphisme diagonalisable d et un endomorphisme nilpotent n qui commutent entre eux et tels que $u = n + d$ (Décomposition de Dunford).

8. Supposons que μ est de degré n. Montrer qu'il existe une base de E sur laquelle la matrice de u est la matrice compagnon de μ. Que dit ce résultat si u est nilpotent d'ordre n ?

Réduction des endomorphismes nilpotents

9. Montrer que la suite $0 \subset \ker u \subset \ker u^2 \subset \dots$ est stationnaire à partir du plus petit indice i tel que $\ker u^i = \ker u^{i+1}$. En déduire qu'un endomorphisme nilpotent sur E est d'ordre de nilpotence au plus n.

10. Supposons que u est nilpotent, montrer que l'endomorphisme transposé de u est nilpotent de même indice de nilpotence ; soit k cet indice. Montrer l'existence d'une forme linéaire f sur E et d'un vecteur x de E tels que $f \circ u^{k-1}(x) \neq 0$. Montrer que $E_f = \cap \ker_{i\geq 0} f \circ u^i$ et $E_x = \sum_{i\geq 0} K u^i(x)$ sont stables par u et vérifient $E = E_f \oplus E_x$.

En déduire que E se décompose en une somme directe de sous-espaces stables par u sur lesquel la restriction de u est nilpotente d'ordre maximal.

11. Déduire de la question précédente que tout endomorphisme nilpotent peut être mis sous forme de Jordan. Montrer l'existence de la réduction de Jordan si μ est scindé.

Le théorème de Cayley-Hamilton

12. Énoncer ce théorème et le déduire des questions précédentes.

13. Si $K = \mathbb{C}$, montrer que les endomorphismes diagonalisables sont denses dans $\mathrm{End}(E)$, et donner une seconde démonstration du théorème.

14. (*) Soit $K' = K(A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ le corps des fraction en n indéterminées sur K. Montrer que le polynôme caractéristique de $[A_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ de $M_n(K')$ est à racines simples. En déduire une troisième preuve du théorème.

Le cas des espaces réels et complexes

15. Montrer que pour tout facteur irréductible P de μ, il existe un sous-espace de E stable par u tel que la restriction de u à E a pour matrice sur une base adaptée la matrice compagnon de P.

16. En déduire que tout endomorphisme complexe admet une valeur propre et que tout endomorphisme réel admet une droite ou un plan stable.

Réduction dans les espaces euclidiens et hermitiens

Dorénavant, $K = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), E est un espace vectoriel euclidien (resp. hermitien). On note u^* l'adjoint de u.

17. Montrer que si un sous-espace F de E est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

18. Soit p (resp. q) la projection orthogonale sur F (resp. $F^\perp$). Montrer que p et q sont autoadjoints.

19. Montrer que $u = pup + uq$ et $u^* = u^*p + qu^*q$.

20. Supposons de plus que u est normal, c'est-à-dire commute avec u^*. Montrer que pup est normal et que $puqu^*p$ est nul. En déduire que puq est nul et que F est stable par u^*.

21. Montrer que que tout endomorphisme normal d'un espace hermitien est diagonalisable et que tout endomorphisme normal d'un espace euclidien est une somme directe orthogonale d'endomorphismes sur des droites et des plans.

22. Montrer que tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est diagonalisable.

23. Montrer que tout endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien est somme directe orthogonale d'une symétrie orthogonale et d'une somme directe orthogonale de rotations.