Université de Nice Année 2004-2005
Préparation à l'Agrégation Externe de Mathématiques
Algèbre et Géométrie

Panorama sur les formes bilinéaires et les formes quadratiques

1. Formes bilinéaires

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K, de caractéristique différente de 2.

Définition 1 *Une application* $\phi: E \times E \to K$ *est dite* bilinéaire *si* $i_\phi: x \mapsto (y \mapsto \phi(x, y))$ *est à valeurs dans* E^* *et linéaire sur* E, *ce qui équivaut à ce que* $j_\phi: x \mapsto (y \mapsto \phi(y, x))$ *le soit.*

On dit que ϕ *est* symétrique *(resp.* antisymétrique, *ou* alternée*) si* $i_\phi = j_\phi$ *(resp.* $i_\phi = -j_\phi$*). On dit qu'elle est* non-dégénérée *si* i_ϕ *est bijective, cela équivaut à ce que* j_ϕ *le soit. On appelle* rang *(resp.* noyau*) de* ϕ *celui de* i_ϕ, *qui est égal à celui de* j_ϕ.

La matrice d'une forme bilinéaire sur une base (e_i) *de* E *est celle de* j_ϕ *dans les base* (e_i) *et* (e_i^*). *Elle est symétrique (resp. antisymétrique) si et seulement si* ϕ *l'est.*

Lemme 2 *L'espace des formes bilinéaires est somme directe de celui des formes symétriques et de celui des formes antisymétriques.*

Définition 3 *Si* ϕ *est symétrique ou antisymétrique, alors on définit l'orthogonal d'une partie* A *de* E *comme étant l'orthogonal de* $i_\phi(A) = j_\phi(A) \subset E^*$. *Une base est dite* orthogonale *si deux vecteurs distincts la composant sont orthogonaux.*

Lemme 4 *Si* ϕ *est non-dégénérée, l'orthogonalité définit une involution décroissante de l'ensemble des sous-espaces de dimension* r *de* E *dans celui des sous-espaces de dimension* $\dim E - r$.

Lemme 5 *Toute forme bilinéaire* ϕ *symétrique ou antisymétrique induit sur* $E/\ker\phi$ *une forme bilinéaire non-dégénérée.*

2. Réduction des formes bilinéaires symétriques et antisymétriques

Théorème 6 *Toute forme bilinéaire symétrique admet une base orthogonale.*

Corollaire 7 *Si tout élément de* K *admet une racine carrée dans* K *(en particulier si* $K = \mathbb{C}$*), alors toute forme bilinéaire symétrique admet une base orthonormale.*

Corollaire 8 *Si* $K = \mathbb{R}$, *alors toute forme bilinéaire symétrique* ϕ *admet pour matrice sur une base adaptée une matrice diagonale dont les coefficients valent* $1, -1$ *ou* 0. *On appelle* signature *de* ϕ *le couple* (r, s), *où* r *(resp.* s*) est le nombre de coefficients diagonaux égaux à* 1 *(resp.* -1*), elle est indépendante de la base choisie et ne dépend que de* ϕ.

Théorème 9 *Soit* ϕ *une forme quadratique antisymétrique non-dégénérée, alors il existe un entier* $p \leq \dim E/2$ *et une base* $(e_i)_{1 \leq i \leq \dim E}$ *de* E *telle que* $\phi(e_i, e_{p+j}) = \delta_{i,j}$ *si* $1 \leq i, j \leq p$ *et telle que* $(e_i)_{i \geq 2p+1}$ *est une base de* $\ker\phi$.

Corollaire 10 *S'il existe une forme quadratique antisymétrique non-dégénérée sur* E *alors* $\dim E$ *est paire.*

3. Formes quadratiques et réduction des formes quadratiques

Définition 11 *On appelle* forme quadratique *toute fonction q de E dans K telle qu'il existe une forme bilinéaire ϕ sur E telle que $q(x) = \phi(x,x)$ pour tout $x \in E$. On dit alors que q est* attachée à ϕ. *La forme quadratique attachée à une forme antisymétrique est nulle.*

On appelle forme polaire *de la forme quadratique q l'unique forme bilinéaire symétrique ϕ à laquelle q est attachée. On dit que q est* non-dégénérée *si ϕ l'est ; on appelle* noyau *(resp.* rang*) de q celui de ϕ ; on dit que deux vecteurs sont* orthogonaux *pour q s'il le sont pour ϕ ; si $K = \mathbb{R}$, on appelle* signature *de q celle de ϕ.*

On appelle vecteur isotrope *de la forme quadratique q tout vecteur sur lequel q s'annule. On appelle* cône isotrope *l'ensemble des vecteurs isotropes. On dit que q est* définie *si son cône isotrope est nul. On dit d'un sous-espace de E qu'il est* totalement isotrope *s'il est inclu dans le cône isotrope de q.*

Lemme 12 *Si q est une forme quadratique définie, alors elle vérifie $F^\perp \oplus F = E$ pour tout sous-espace F de E.*

Théorème 13 *Toute forme quadratique de rang p est une combinaison linéaire de p carrés de formes linéaire linéairement indépendantes.*

Corollaire 14 *Si tout élément de K admet une racine carrée dans K (en particulier si $K = \mathbb{C}$), alors toute forme quadratique de rang p est une somme de carrés de p formes linéaire linéairement indépendantes.*

Corollaire 15 *Si $K = \mathbb{R}$, alors toute forme quadratique de rang p est une combinaison linéaire, de coefficients dans ± 1, de p carrés de formes linéaires linéairement indépendantes. La signature (r,s) de q est telle que r (resp. s) est le nombre de carrés affectés de coefficients 1 (resp. -1). En particulier, une telle forme est définie si elle est d'une part non-dégénérée et d'autre part soit positive, soit négative. Elle admet une base orthonormale si et seulement si elle est définie positive.*

4. Isotropie

Théorème 16 *Toute forme quadratique admet un sous-espace totalement isotrope maximal et tous les sous-espaces totalement isotropes maximaux ont même dimension.*

Corollaire 17 *Soit q une forme quadratique non-dégénérée. Alors E est la somme directe de trois sous-espaces E_1, E_2 et E_3, où E_1 et E_2 sont totalement isotropes, $i_\phi \colon E_1 \to E_2^*$ est bijective, E_1 et E_2 sont orthogonaux à E_3 et q restreinte à E_3 est définie.*

Corollaire 18 *Si $K = \mathbb{R}$, et si q est non-dégénérée, la dimension des sous-espaces totalement isotrope maximaux pour q est $\min\{r,s\}$, où (r,s) est la signature de q. Si $K = \mathbb{C}$, la dimension des sous-espaces totalement isotropes est la partie entière de $\dim E/2$.*