Université de Nice — Année 2003-2004
Préparation à l'Agrégation Externe de Mathématiques
Algèbre et Géométrie

Relations d'équivalence et quotient

Pour tout entier n, on note $X_n = \{1, \ldots, n\}$. Pour tout couple d'entiers n, p, on note $F_{n,p}$ l'ensemble des fonctions de X_p dans X_n, I_n, p l'ensemble des fonctions injectives de X_p dans X_n, $E_{n,p}$ l'ensemble des parties de X_n à p éléments.

1. On considère la relation d'équivalence sur $F_{n,p}$ "a même valeur en 1 que". Écrire la formule sur les cardinaux correspondante. Même question pour $I_{n,p}$.

2. On considère l'application $E_{n,p} \to \{\emptyset, \{1\}\}$ qui attache à X son intersection avec $\{1\}$. écrire la partition correspondante de $E_{n,p}$ et la formule obtenue sur les cardinaux.

3. Munir $F_{n,p}$ d'une action de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que cette structure préserve $I_{n,p}$ et que l'équation aux classes permet d'en calculer le cardinal.

4. Munir $E_{n,p}$ d'une action de $\mathfrak{S}_n$. Écrire l'équation aux classes et calculer le cardinal de $E_{n,p}$.

5. Trouver une application naturelle de $I_{n,p}$ dans $E_{n,p}$, compatible à l'action de $\mathfrak{S}_n$. Écrire la partition de $I_{n,p}$ attachée et retrouver le cardinal de $E_{n,p}$.

6. Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. Donner une condition nécessaire et suffisante sur H pour que G/H soit un groupe.

7. Même question avec A un anneau et I un sous-groupe de A, A/I devant cette fois être un anneau.

8. Expliquer en termes de morphisme d'anneaux la règle de divisibilité d'un nombre entier écrit dans le système décimal par 3.

Soit p un nombre entier et $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

9. Écrire la filtration attachée à l'application $x \mapsto x^{(p-1)/2}$ de k^* dans lui même. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément de k^* soit un carré.

Soit $G = \mathrm{GL}_2(k)$ et X l'ensemble des droites de E.

10. Trouver une application $E^* \to X$ et en déduire le cardinal de X.

11. Faire agir G sur X et en déduire le cardinal de G.