Séries numériques

1 $u_{2n} = \frac{1}{n+1},\ u_{2n+1} = \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right),\ n \geq 0$

1. Montrez que la série $\sum u_n$ est à termes alternés, convergente, de somme la constante d'Euler: $\gamma := \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) \simeq 0,57772156649\cdots$

2. En déduire pour $n \geq 1$, les relations: $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < \gamma + \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}$.

3. Exprimer $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ comme différence de deux sommes partielles de la série de terme général $(\frac{1}{k})$.

   En introduisant γ, montrez que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

4. On note, pour $n \geq 0$, $v_n = \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+2}$, $w_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)}$. Avec un artifice analogue, calculer la somme des deux séries $\sum v_n$, $\sum w_n$.

2 Séries des nombres premiers

On note $(p_n)_{n\geq 1}$ la suite des nombres premiers classée dans l'ordre croissant: $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5, \cdots$

1. Si $\alpha > 1$, montrez que $\sum p_n^{-\alpha}$ converge.

2. Soit (u_n) une suite à valeurs dans $]0, 1[$, montrez que les séries suivantes sont de même nature: $\sum u_n$, $\sum \ln(1+u_n)$, $\sum \ln(1-u_n)$, $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$.

3. On note $\Pi_m := \prod_{n=1}^{m} (1 - p_n^{-1})^{-1}$.

   (a) A l'aide de la série géometrique associée à $(1-x)^{-1}$, et de l'unicité de la décomposition d'un entier en facteurs premiers, montrez que $\Pi_m \geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}$.

   (b) En déduire la nature de Π_m, $\sum \ln(1 - p_n^{-1})$, et $\sum p_n^{-1}$.

3 Séries à terme général décroissant

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrez que $nu_n \to 0$.

2. Si (u_n) est positive, montrez que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum 2^m u_{2^m}$ converge.

3. Etudiez la nature des séries de terme général suivant pour $s > 0$:
   $\frac{1}{n^s}, \frac{1}{(\ln(n))^s}, \frac{1}{n[\ln(n)]^s}, \frac{1}{n\ln(n)[\ln(\ln(n))]^s}, \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))[\ln(\ln(\ln(n)))]^s}, \cdots$

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites à termes strictement positifs.

1. Montrez que si à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, la convergence de $\sum v_n$ entraîne la convergence de la $\sum u_n$ et la divergence de $\sum u_n$ entraîne la divergence de la $\sum v_n$.

2. Application : retrouvez le **critère d'Alembert** : Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to r$, et si $r < 1$ montrez que la $\sum u_n$ converge en prenant pour v_n une suite géometrique de raison ρ avec $r < \rho < 1$.
   De même, montrez que $\sum u_n$ diverge si $r > 1$.

3. Application : retrouvez le **critère de Duhamel.**. Soit $\lambda \in I\!R$. On suppose que :
   $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\lambda}{n} + \dfrac{\varepsilon_n}{n}$, $\quad \varepsilon_n \to 0$. Montrez que si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ converge et si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ diverge.
   Pour cela, on prendra $v_n = n^{-s}$, $s > 0$, et on vérifiera que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \dfrac{s}{n} + \dfrac{s(s+1)}{2n^2} + \dfrac{\eta_n}{n^2}$, $\quad \eta_n \to 0$.

4. Application : retrouvez le **critère de Gauss**. Soit $c \in I\!R$. On suppose que :
   $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{c}{n^2} + \dfrac{\varepsilon_n}{n^2}$, $\quad \varepsilon_n \to 0$, alors $\sum u_n$ diverge. ($v_n = (n+a)^{-1}$).

5. Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{s}{n\ln(n)} + \dfrac{\varepsilon_n}{n\ln(n)}$, $\quad \varepsilon_n \to 0$, alors montrez que $\sum u_n$ converge si $s > 1$, diverge si $s < 1$. ($v_n = 1/(n\ln^s(n))$).

6. Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{s}{n} + \varepsilon_n$, et si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |\varepsilon_n|$ converge .

   (a) Montrez que $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -\dfrac{s}{n} + w_n$, avec $\sum |w_n|$ qui converge.

   (b) En déduire qu'il exiset $A > 0$ tel que: $u_n \sim \frac{A}{n^s}$. En déduire la nature de $\sum u_n$.

7. Etudiez la nature des séries de terme général suivant :
   $\left(\dfrac{1.4.7\cdots(3n-2)}{3.6.9\cdots(3n)}\right)^2$; $(-1)^n\dfrac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$, $a \in I\!R$; $\left(\dfrac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.2.6\cdots(2n)}\right)^2$; $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2 - e^{1/k})$.

5 Une application de la sommation d'Abel

1. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites, on pose $\sigma_0 := 0$, $\sigma_n := a_1 + \cdots + a_n$.
   Supposons que : (i) $(\sigma_n)/\sqrt{n}$ est bornée, (ii) $\sum \sqrt{n}|b_n - b_{n+1}|$ converge, (iii) $\sqrt{n}b_n \to 0$,
   alors, montrez que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ converge.

2. Soit $[x]$ la partie entière de x, $\alpha > 0$, $a_n := (-1)^{[\sqrt{n}]}$, $b_n = n^{-\alpha}$, et $v_n := a_n b_n$. Etudiez la nature de la série $\sum v_n$. On pourra commencer par le cas où $\alpha = 1$, puis $\alpha > 1/2$.

Références: Krée & Vauthier, Lelong-Ferrand & Arnaudiès, Pommelet, Rudin, Zuily & Queffélec.