Agrégation Analyse (F. Rouvière) **7.12.04**

RÉVISIONS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL

1. Différentiabilité. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \ , \ f(0,0) = 0 \ .$$

Montrer que f admet à l'origine une dérivée selon chaque vecteur. Est-elle différentiable ?

2. Difféomorphismes. Construire un difféomorphisme du plan sur un quart de plan (ouvert), ou du plan sur un disque (ouvert).

3. Ellipse et hyperbole. Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ on note PQ la distance de deux points $P, Q \in \mathbb{R}^2$.
a. Deux points A, B étant donnés, calculer le gradient de la fonction

$$f(M) = AM + BM \ .$$

En déduire une propriété géométrique de la tangente à l'ellipse.
b. Même question pour

$$g(M) = AM - BM \ .$$

En déduire qu'ellipses et hyperboles homofocales se coupent à angle droit.

4. Une petite équation aux dérivées partielles. On considère l'équation

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \ ,$$

où a et b sont deux constantes données.
a. Rechercher les solutions particulières linéaires. On note $u(x,y)$ l'une d'elles.
b. Trouver la solution générale, à l'aide d'un changement de coordonnées de la forme $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$.

5. Étude locale d'une fonction implicite. Montrer que le système d'équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^2 + 3xy + 2z = 0 \end{cases}$$

admet au voisinage de $x = 1$ une unique solution $(\varphi(x), \psi(x))$ proche de $(-1, 1)$.
Déterminer la tangente en ce point à la courbe obtenue. Donner un développement limité à l'ordre deux de φ et ψ en $x = 1$.

Références.

1. Mialet, Schneider, Tisssier, *Analyse à plusieurs variables réelles*, Bréal 2002, p.344.
3. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, 2ème édition, Cassini 2003, p.272.
4. Mialet, Schneider, Tissier, p.344.
5. Mialet, Schneider, Tissier, p.412 (exercice analogue).