Agrégation Analyse (F. Rouvière) **12.10.04**

SUITES NUMÉRIQUES

1. Calculs de limites. Calculer $\lim n \sin(2\pi e n!)$ et $\lim n \sin\left(\pi\left(\sqrt{2}+1\right)^n\right)$ lorsque n tend vers l'infini.
[Pour la seconde on pourra observer que $\left(\sqrt{2}+1\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n$ est entier...]

2. "Règle de l'Hospital" pour les suites. Si (a_n) est une suite réelle on note $\Delta a_n = a_n - a_{n-1}$.
a. Soit (b_n) une suite strictement croissante qui tend vers l'infini. On suppose que $c_n = \Delta a_n / \Delta b_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}$ lorsque n tend vers l'infini. Montrer que $a_n/b_n \longrightarrow \ell$.
[On pourra considérer l'expression $\left(\Sigma_1^n \lambda_k c_k\right)/\left(\Sigma_1^n \lambda_k\right)$ avec $\lambda_k = \Delta b_k$.]
b. *Application.* Montrer que, pour $n \to \infty$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} .$$

3. Valeurs d'adhérence.
a. Soit (x_n) une suite *bornée* de $\mathbb{R}$, telle que $x_{n+1} - x_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. On note $\ell = \liminf x_n$, $L = \limsup x_n$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n) est le segment $[\ell, L]$.
[On pourra raisonner par l'absurde, en supposant qu'il existe un point entre ℓ et L qui ne soit pas valeur d'adhérence.]
b. *Exemple :* $x_n = \sin(\theta_0 + \theta_1 + \cdots + \theta_n)$ avec $\lim \theta_n = 0$.

4. Limite supérieure et limite inférieure. On considère une suite (x_n) de $\mathbb{R}$ dont *chaque terme est inférieur à la moyenne des deux précédents.* On veut montrer que la suite converge, vers une limite finie ou vers $-\infty$.
a. Montrer que la suite est majorée. Est-elle décroissante ?
b. Soient $\ell = \liminf x_n$, $L = \limsup x_n$ et $\varepsilon > 0$. Montrer l'existence de k tel que $x_k \leq \ell + \varepsilon$ et $x_{k-1} \leq L + \varepsilon$, et en déduire une majoration de x_n pour $n \geq k$. Conclure que $\ell = L$.

5. Racines carrées itérées.
a. On donne $a > 0$. Montrer que la suite des

$$a_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots \sqrt{a}}} \text{ , } n \geq 1 \text{ ,}$$

(n racines carrées) converge, et calculer sa limite ℓ.
b. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres strictement positifs. Déduire de **a** que la suite des

$$x_n = \sqrt{u_1 + \sqrt{u_2 + \cdots \sqrt{u_n}}} \text{ , } n \geq 1 \text{ ,}$$

converge si et seulement si la suite des $2^{-n} \ln u_n$ est majorée.

Références.

1. Makarov et al., *Selected problems in real analysis*, p.17
2. Makarov p.20
3. Tissier-Mialet, *Analyse à une variable réelle*, p.75
Leichtnam, *Exercices corrigés, Analyse*, p.27
4. Makarov p.22
5. Makarov p.18.