Université de Nice
Préparation à l'Agrégation Externe de Mathématiques
Algèbre et Géométrie

Année 2003-2004

Opérations élémentaires sur les lignes et colonnes d'une matrice et décompositions dans le groupe linéaire

Soit K un corps et n un entier naturel non nul. Pour tout couple (i, j) vérifiant $1 \leq i, j \leq n$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont le seul coefficient non-nul est le coefficient (i, j), qui vaut 1. On appelle matrice de transvection (resp. dilatation) toute matrice du type $\mathrm{Id}_n + \lambda E_{i,j}$ (resp. $\mathrm{Id}_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$), avec $i \neq j$ et $\lambda \in K$ (resp. $\lambda \in K^*$). On appelle matrice de permutation toute matrice du type $E_{i,j} + E_{j,i} + \sum_{k \neq i,j} E_{k,k}$, avec $i \neq j$.

1. Montrer que $\lambda \mapsto \mathrm{Id}_n + \lambda E_{i,j}$ $(i \neq j)$ et $\lambda \mapsto \mathrm{Id}_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ sont des morphismes de groupes.

2. Montrer que la conjuguée d'une transvection (resp. dilatation) par une permutation est une transvection (resp. dilatation).

3. Montrer que le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$ engendré par les dilatations est commutatif, déterminer ce groupe.

4. Montrer que la conjuguée d'une matrice de transvection par une matrice de dilatation est une matrice de transvection.

5. Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupes $\phi\colon \mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}_n(K)$ qui envoit la transposition (i, j) sur la matrice de permutation attachée à (i, j) pour tout couple (i, j). Quelle est le morphisme composé $\det \circ \phi$?

6. (Pivot de Gauss) Soit m un entier naturel non nul et $A \in M_{n \times m}(K)$. Montrer qu'il existe une suite $P_1, \ldots, P_n$ de matrices qui sont soit des permutations, soit l'identité, et une suite de produits de transvections triangulaires inférieures $T_1, \ldots, T_n$ telles que $T_1 P_1 \ldots T_k P_k A$ est une matrice triangulaire supérieure (c'est à dire de coefficient (i, j) nul si $i > j$).

7. (Signification des pivots) Supposons que tous les mineurs principaux de A sont non nuls. Montrer que dans la question précédente, on peut prendre $P_1 = \ldots = P_n = \mathrm{Id}$ et que pour tout i, $1 \leq i \leq n$, le coefficient (i, i) de la matrice $T_1 \ldots T_n A$ est le i-ième mineur principal de A.

8. (Décomposition LR) En déduire que toute matrice carrée dont les mineurs principaux sont non nuls s'écrit comme un produit d'une matrice triangulaire inférieure de diagonale l'identité par une matrice triangulaire supérieure.

9. Montrer que pour toute matrice $A \in M_{n,m}(K)$, il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\mu \in \mathfrak{S}_m$ tel que tous les mineurs principaux de $\phi(\sigma)A\phi(\mu)$ sont non nuls. La décomposition LR existe-t-elle pour toute matrice inversible A ?

10. (Décomposition LR et inversion des matrices) Montrer que toute matrice inversible triangulaire supérieure est un produit de transvections triangulaires supérieures et de dilatations.

11. (Génération de $\mathrm{GL}_n(K)$) Montrer que toute matrice de permutation est un produit de trois transvections et d'une dilatation attaché à $\lambda = 2$. En déduire que $\mathrm{GL}_n(K)$ est engendré par les transvections et les dilatations. En utilisant **4**, montrer que tout élément de $\mathrm{GL}_n(K)$ est un produit de matrices de transvections par une matrice diagonale.

12. (Connexité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$) Montrer qu'un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ engendré par des sous-groupes connexes par arcs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

13. (Connexité de $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice diagonale de coefficients ± 1 dans la même composante connexe par arcs que A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. En déduire que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs.

14. (Génération de SL_n) En utilisant **2**, **4** et **11**, montrer que $\mathrm{SL}_n(K)$ est engendré par les transvections. En déduire que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.