Université de Nice-Sophia Antipolis
Département de Mathématiques
Préparation à l'Agrégation externe
2005/2006

Exercices de géométrie du premier cycle

Exercice 1: Soit A un point du plan orienté d'affixe $a \in \mathbb{C}$, et soit un vecteur $\vec{u} \neq 0$ d'affixe $\omega \in \mathbb{C}^\star$. Soit M un point du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}$. Montrez que M appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ ssi $z\bar{\omega} - \bar{z}\omega = a\bar{\omega} - \bar{a}\omega$.

Exercice 2: Soit G in sous-groupe fini de $Gl_n(K)$, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tel que $\sum_{M\in G} Tr(M) = 0$. Montrez que $\frac{1}{|G|}\sum_{M\in G} M$ est un projecteur, puis que $\sum_{M\in G} M = 0$.

Exercice 3: On se place dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$ orienté par la base canonique. Donnez la matrice dans la base canonique de la rotation d'axe dirigé par le vecteur $\vec{k} = (-2, 2, 1)$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\theta = 4/5$ et $\sin\theta = 3/5$.

Exercice 4: On se place dans un espace vectoriel Euclidien orienté de dimesnion 3. Soit ρ une rotation d'axe Δ une droite vectorielle, et σ une réflexion d'hyperplan H. Montrez que ρ et σ commutent ssi $H = \Delta^\perp$ ou ($\Delta \subset H$ et ρ est un retournement). Déterminez alors $\rho \circ \sigma$.

Exercice 5: On se place dans un plan affine. On se donne deux droite D et Δ sécantes en un unique point I. On suppose que ces droites sont données par leurs équations. En utilisant ces équations, donnez la forme générale de l'équation d'une droite passant par I.

Exercice 6: Soit $\mathcal{A}$ un espace affine et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de convexes de $\mathcal{A}$. Montrez que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est convexe.

Exercice 7: Soit $\mathcal{E}$ un espace affine Euclidien. Soient $\alpha, \beta\,\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$. Soient $A, B, C \in \mathcal{E}$, et soit G le barycentre de $\{(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)\}$. Montrez que pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha+\beta+\gamma)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2$. En déduire l'ensemble des points M tels que $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k$, k étant une constante réelle.

Exercice 8: Soit $\mathcal{A}$ un espace affine. Soit $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. On suppose qu'il existe $A \in \mathcal{A}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(A)\vec{f}(M) = \alpha A\vec{M}$ pour tout $M \in \mathcal{A}$. Montrez que f est affine.

Exercice 9: Donnez une équation cartésienne des plans suivants paramétrés par $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{P} : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 + 2\lambda + \mu \\ z = 1 - \lambda - \mu \end{array} \right\} \text{ et } \mathcal{P}' : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 3\lambda - \mu \\ y = 3 + 3\lambda + \mu \\ z = 1 - 2\lambda \end{array} \right\}.$$

Quelle est la position relative de ces plans?

Exercice 10: On se place dans un espace affine de dimension 2. Déterminez le groupe d'isométries affine laissant invariant:

(a) un point, (b) deux points, (c) un carré

Exercice 11: On se place dans un espace affine de dimension 3. Déterminez le groupe d'isométries affine laissant invariant:

(a) un point, (b) deux points, (c) un cube, (d) une sphère

Exercice 12: On se donne trois points A, B, C non alignés dans un espace affine Euclidien orienté de dimension 3. Déterminez l'ensemble des points M de l'espace tels que $[\vec{MA}, \vec{MB}, \vec{MC}] = k$, $k \in \mathbb{R}$ étant une constante fixée.

Exercice 12: On se place dans un espace affine Euclidien. On se donne deux points A, B de cet espace. Déterminez l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ étant une constante fixée.