Chap. 1 Théorie des ensembles

Ensembles ordonnés (F ev $\mathcal{L}$ ens des parties libres ordonnées par $\subset$ - ens inductif, axiome de Zorn - appl. à l'existence d'une base, d'un supplémentaire) - Cardinaux (def de $+, \times, \leq$) - Cardinaux finis ou entier naturel (def ens fini - ptés de $\mathbb{N}$ - principe de récurrence) Ensembles dénombrables (def - $\bigcup_{k \in K} A_k$ où K et les A_k sont (au plus) dénombrables - produit cartésien fini d'ens dénombrables - ens des nbres algébriques sur $\mathbb{Q}$ est dénombrable)

2 Groupes

Morphisme de groupes (automorphisme intérieur (centre Z) - classe de conjugaison de $\tau \in GL(E)$ τ symétrie). Sous groupes (ex sous groupes de $\mathbb{Z}$ - classe selon un sous groupe, th de Lagrange - sous groupes distingués - groupe quotient - Factorisation canonique d'un morphisme de groupe - ex - Sous groupe engendré par une partie, groupe (fini) monogène (cas part. $\langle a \rangle = \{a^k \; k \in \mathbb{Z}\}$ - étude des groupes monogènes, ordre d'un elt) - Groupes opérant sur un ensemble (def. ex - équivalence avec la donnée d'un morphisme de G ds $\mathfrak{S}_X$ - orbite, stabilisateur - eq des classes de conjugaison - appl aux gr d'ordre p^2 où p est premier)

3 Anneaux

Généralité (def - unités - anneau intègre - anneau ordonné) - Idéaux (ss anneau - anneau quotient - morphisme d'anneaux - idéal engendré, anneau principal) - Caractéristique ($\langle 1_A \rangle$, formule du binôme en caract. p premier) - Divisibilité dans les anneaux principaux (elt associés, d'irréductibles - décomposition en elts irréductibles - PPCM, PGCD, th de Bezout)

4 Corps

(def - idéaux de $\mathbb{K}$ - ss corps, ss corps engendré, ss corps premier Π - corps des fractions d'un anneau intègre (ex $\mathbb{Z}$, $\mathbb{K}[X]$ resp. irréductible) - idéal premier, idéal maximal)

5 Polynomes

Généralités - division euclidienne ($\Rightarrow K[X]$ est principal - généralisation anneau intègre euclidien - algorithme d'Euclide) - Division suivant les puissances croissantes - Racines ($A \in K[X]$ $A(\alpha)=0 \Leftrightarrow (X-\alpha) \mid A$ - Formule de Taylor en caract. 0 - appl. à la multiplicité des racines) - Polynomes de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$ (th de d'Alembert - Relation entre coef. et racines ds $\mathbb{C}[X]$ - Polynomes réciproques)

6 Extension de corps

(def) - Etude des extensions simples ($L = K(\alpha)$ φ $\begin{matrix} K[X] \to L \\ P \to P(\alpha) \end{matrix}$ si $\ker\varphi \neq \{0\}$ on dit que α est algébrique sur K $K[X]/(m_\alpha) \simeq K(\alpha)$ - L extension de K est un ev sur K - si α est alg. sur K $\dim K(\alpha) = \deg m_\alpha$ - si L est une ext. de K l'ens des nbres alg. sur K est un corps) - Adjonction de racines (P irréductible sur K $K[X]/(P)$ - corps des racines)

7 le corps des reels

Introduction (K commutatif totalement ordonné alors $\Pi \simeq \mathbb{Q}$ - corps archimédien, div. euclidienne - suites ds un corps ordonné, suite de Cauchy - def de $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$) - Th des segments emboités ($\Rightarrow$ suites adjacentes - appl approximation décimal d'un réel, developt decimal d'un reel, dev. dec. impropres - caract. des rationnels) - Théorème de la borne supérieure (dem par dichotomie - appl. aux suites monotones - intervalles de $\mathbb{R}$) - Théorème de Bolzano Weierstrass (dem par dichotomie ou bien $S = \{s \in \mathbb{N} \; \forall r \geq s \; x_r \geq x_s\}$ on construit une suite extraite monotone) - Etudes de certaines suites de reels (q^n, $\sum q^n$, si $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \to \ell \in [0,1[$ $x_n \to 0$, $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$ $(a,b) \in \mathbb{C}^2$) - Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ (limite - th des approximations successives (f $I \to I$ contractante), pts attractifs, répulsifs) - Th de Cesaro (application $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \to \ell$ - $a_n \sim b_n$, $a_n \in \mathbb{R}_+$, $\sum a_n$ diverge alors $\sum_0^n a_k \sim \sum_0^n b_k$ - recherche d'équivalents des suites $u_{n+1} = f(u_n)$ $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ ou $f \in C^0 [0,c[\to [0,c[$ $0 < f(x) < x$ sur $]0,c[$ et $\exists (b,\alpha) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+^*$ $f(x) - x \sim b x^{\alpha+1}$)

8 Topologie

Définition d'une topologie (def - top de l'ordre sur $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$ - Fermés) - Adhérence, intérieur, frontière (def - partie dense) - Voisinages (syst. fond. de vois de a - Ouvert $\Leftrightarrow$ $\forall a \in O$ $O \in \mathcal{V}(a)$ - espace top. séparé - pt adhérent, isolé, d'accumulation) - Topologie induite topologie produit (top induite (ptés - partie discrète) - top. produit (ouverts élémentaires - SFV)) - limite, continuité (f $E \to F$ - limite d'une suite - top produit - caractérisation f C^0 sur E $\Leftrightarrow$ $\forall O$ ouvert de F $f^{-1}(O)$ ouvert de E - Homéomorphisme)

9 Espaces metriques

Généralités (def - ex valuation - partie bornée - distance de a à X, de X à Y - isométrie - distance sur un produit) - Topologie d'un espace metrique (Boules ouvertes, fermées - ex boules ouvertes de $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$ - Topologie (topologie métrisable - ptés : séparé) - Distances topologiquement équivalentes, équivalentes (cas des espaces produits) - Topologie induite) - Continuité, continuité uniforme (def - application lipschitzienne) - Caractérisation séquentielle (Pts adhérents, pts d'accumulation ($d(a,X) = 0 \Leftrightarrow a \in \overline{X}$) - limite, continuité - Valeurs d'adhérence (def - caract. par les suites extraites - top produit - $\bigcap \overline{S_n}$, $\bigcap_{U \in \mathcal{V}(a)} \overline{f(X \cap U)}$ - cas particulier : suites d'elts de $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$) ($\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$ - ex $x_{n+p} \leq x_n + x_p$ Π_q $\frac{x_n}{n}$ cvge))

10 Espaces complets

Généralités (def - conservation par les applications unift continues) - Sous espaces, espaces produits ($E' \subset E$ E' complet $\Rightarrow E'$ fermé.) - Th des fermés emboités - critère de Cauchy pour les fonctions - Th des approximations successives (f $E \to E$ $\exists p \in \mathbb{N}^*$ f^p contractante) - Prolongement des appl. unift continues (sur D dense de E)