chap. 21 Méthode de Gauss

Transformations élémentaires ($A \in M_{np}(K)$, $B_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$, $B'_{ij}(\lambda) = I_p + \lambda E'_{ij}$, $\det B_{ij} = 1$, on considère $B_{ij}(\lambda) A$, $A B_{ij}(\lambda)$ - lemme de Gauss (transformation de A par opérations élémentaires)) - Calcul d'un déterminant - Calcul d'une matrice inverse ($BA = T$ $A = B^{-1}T$ d'où $A^{-1} = T^{-1}B$ où $B'A = D$ - ~~B~~ B est triang. inférieure $A = B^{-1}T$ factorisation LU de A en part. si les mineurs principaux de A sont $\neq 0$ A admet une fact. "LU" - Résolution d'un syst. par la méthode du pivot)

22 Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation, trigonalisation

Valeurs propres, vecteurs propres ($\{x \neq 0 \text{ tq } u(x) = \lambda x\} = E_\lambda$ - ex projecteur, elt nilpotent - si $P(u) = 0$ et $\lambda \in Sp$ $P(\lambda) = 0$ - end induit) - Polynômes caractéristiques ($A \in M_n(K)$ $\chi_A(X) = \det(A - XI_n) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A X^{n-1} + \dots + \det A$ - ex mat. de Frobenius $\begin{pmatrix} 0 & & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$) - $\chi_A = \chi_{P^{-1}AP}$ - Pol. caractéristique d'un endomorphisme (appl. aux vp de u - F stable par u $\chi_{u|F} \mid \chi_u$ d'où si λ vp de u $1 \leq \dim E_\lambda \leq \alpha$ ex projecteur, end. nilpotent)) - Endomorphismes et matrices diagonalisables (def - $x_1, \dots, x_p$ vect propres associés à des vp $\neq$ alors $(x_1, \dots, x_p)$ libre u diag. $\Leftrightarrow E = \bigoplus E_{\lambda_i}$) - Endomorphismes diagonalisables et projecteurs (u diag. $\Leftrightarrow \exists (P_1, \dots, P_k)$ projecteurs $\neq 0$, $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ $\lambda_i \neq \lambda_j$ $\sum_{i=1}^{k} P_i = Id$, $P_i \circ P_j = 0$ si $i \neq j$ et $u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$ - P_i est un polynôme en u (on calcule u^k puis interpolation) - Appl u diagonalisable, F stable par u alors $u_{|F}$ diag. et $F = \bigoplus (F \cap E_{\lambda_i})$ - U ens d'elts de $L(E)$ diag. commutant 2 à 2 alors $\exists$ base de diag. commune - ex calcul de B^n, e^B) - Trigonalisation (u trigonalisable $\Leftrightarrow \chi_u$ scindé - u trig. $P \in K[X]$ $\chi_{P(u)} = \prod (P(\lambda_i) - X)$ - U ens d'end trigonalisable commutant 2 à 2 alors $\exists$ base commune de trigonalisation (on montre qu'il existe un vect propre commun puis un hyperplan stable commun) - ex χ_A où $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 \cdots & a_{n-1} \\ a_2 & \cdots & a_n a_1 \end{pmatrix}$)

23 Polynôme minimal, ss espaces caractéristiques

Généralité (Polynôme minimal : $\varphi: K[X] \to L(E)$, $P \mapsto P(u)$ non injective (E de dim finie) $\exists P_0 \ker \varphi = (P)$ - Idéal (F, G stable par u $E = F + G$ $m_u = \operatorname{ppcm}(m_{u_{|F}}, m_{u_{|G}})$) - ex - polyn. min. d'une matrice) - Th de Cayley Hamilton ($\chi_u(u) = 0 \Rightarrow \chi_u$ et m_u ont les mêmes racines) - Théorème des noyaux ($u \in L(E)$ $Q \in K[X]$ $Q = Q_1 \cdots Q_k$ $Q_i \wedge Q_j = 1$ si $i \neq j$ alors $\ker Q(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker Q_i(u)$ - u diag. $\Leftrightarrow m_u$ est scindé et n'a que des racines simples - appl aux sg fini de $GL(E)$ ($p = \# G$ $\forall u \in G$ $u^p = Id$) - F stable par u u diag $\Rightarrow u_{|F}$ diag ($m_{u_{|F}} \mid m_u$)) Sous espaces caractéristiques ($E'_{\lambda_i} = \ker (u - \lambda_i Id)^{\alpha_i}$ où α_i est la multiplicité de λ_i ds χ_u - $\ker(u - \lambda_i Id) \subsetneq \ker(u - \lambda_i Id)^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker(u - \lambda_i Id)^{\beta_i}$ suite stationnaire à partir du rg β_i (où β_i est la mult. de λ_i ds m_u) - th si χ_u est scindé $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E'_{\lambda_i}$, E'_{λ_i} stable par u et $u_{|E'_{\lambda_i}} - \lambda_i Id_{E'_{\lambda_i}}$ est nilpotent, $\dim E'_{\lambda_i} = \alpha_i$ - th $\exists! (d, n)$ d diag. n nilpotent $nd = dn$ et $u = d + n$, d et n sont des polyn. en u - Forme matricielle - appl au calcul de e^u - $u \in L(E)$ tq χ_u scindé F stable par $u \Leftrightarrow F$ est somme de ss esp. stable de ss esp caractéristiques)

24 Réduction de Jordan

Réduction des end. nilpotents (v nilpotent d'indice β $N_j = \ker v^j$ $\{0\} = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \dots \subsetneq N_\beta = E$ M_j tq $N_{j+1} = M_j \oplus N_j$, $v(M_j) \subset M_{j-1}$ base de $M_{\beta-1} \oplus \dots \oplus M_0$) - Cas général ($\chi_u$ scindé ss espaces caract. $J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$))

25

25 Formes quadratiques

Formes bilinéaires (dimension qcq (def $\mathcal{L}(E, F, K)$ - ex - $\varphi: E \to F^*$, $x \mapsto f_x$, $L(E, F, K) \to L(E, F^*)$, $f \mapsto \varphi$ isomorphisme, de m. avec f) - Cas de la dimension finie ($\dim \mathcal{L}(E, F, K)$ - $\psi = {}^t\varphi$ (on identifie F^{**} à F) - def $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} \varphi = \operatorname{rg} \psi$ - expression matricielle $f(x, y) = {}^tX A Y$ - $\mathcal{L}(E, F, K) \to M_{np}(K)$, $f \mapsto (f(a_i, b_j))$: isomorphisme de K ev où (a_i) et (b_j) sont des bases de E et F resp. $\operatorname{Mat} \varphi / (a_i)(b_j^*) = {}^tA - (f(a_i, b_j)) = P_{(a_i)}^{(a'_i)} (f(a_i, b_j)) Q_{(b_j)}^{(b'_j)}$ matrices congruentes)) - Formes bilinéaires symétriques (car $K \neq 2$ def $\mathcal{S}_2(E, K)$ (resp $\mathcal{A}_2(E, K)$) ens des formes bilinéaires symétriques (resp antisym.) $\mathcal{L}_2(E, K) = \mathcal{S}_2(E, K) \oplus \mathcal{A}_2(E, K)$ - $Q(E)$ ens des formes quadratiques - forme polaire (unicité) - def famille de vect orthogonale, orthonormale, vecteurs isotropes, $X^\perp$ ou $X \subset E$, $\ker f = E^\perp$, ss esp isotrope ($H \cap H^\perp \neq \{0\}$), totalt isotrope ($H \subset H^\perp$) - Pts cone isotrope, $f_{|H^2}$, caract. d'un elt isotrope $\neq 0$, $X^\perp$ - def automorphisme orthogonal, $O(q)$) - Formes bilinéaires symétriques en dim finie (Formes dégénérées et non deg (f non dégén. $\Leftrightarrow \varphi$ isomorphisme de E sur E^*) - Expression matricielle ($q: E \to K$ est une forme quad. ssi $q = 0$ ou q est polynomiale homogène de degré 2 des $(x_1, \dots, x_n)$ - f sym $\Leftrightarrow$ ($f(e_i, e_j)$) sym. d'où $\dim \mathcal{S}_2(E, K) = \frac{n(n+1)}{2}$ - $(f(e_i, e_j)) = (\frac{1}{2} q'_{x_i}(e_j))$) - Orthogonalité en dimension finie (Etude de $F^\perp$ ($F^\circ = \{\alpha \in E^* \ \forall y \in F \ \alpha(y) = 0\}$ ss ev de E^* pour F ss ev de E - si f non dégénérée $\varphi(F^\perp) = F^\circ$ si E possède une base orthonormale (e_i) $\varphi(e_i) = e_i^*$ - f bilinéaire sym qcq $(\varphi(F))^\circ = F^\perp$ et $\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim(\ker f \cap F)$ - F non isotrope $\Leftrightarrow E = F \oplus F^\perp$) Base orthogonale (existence - caract. par l'expression de f - appl au rg de f - Méthode de Gauss (e_i) base orthogonale $\Leftrightarrow q = \sum q(e_i)(e_i^*)^2$ - ex)) - Adjoint d'un endomorphisme (f bil. sym. non dégénérée $f(u(x), y) = f(x, u^*(y))$ $u^* = \varphi^{-1} \circ {}^tu \circ \varphi$ - Pts de u^* ($(u \circ v)^*$, $\det u^* = \det u$, $\ker u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$ $\operatorname{Im} u^* = (\ker u)^\perp$ - (e_i) base orthonormale $\operatorname{Mat} u^* / (e_i) = {}^t\operatorname{Mat}(u)(e_i)$)) - end autoadjoints ($u = u^*$ - caract. matricielle) - Groupe orthogonal def ($u^* u = Id$ - caract. matriciel) - Matrices orthogonales (${}^tMM = I_n$, $O_n(K)$, $SO_n(K)$ - matrice de passage d'une BON à une BON))

26 Formes quadratiques réelles. Espaces euclidiens

Signature d'une forme quadratique réelle (E $\mathbb{R}$ ev de dim finie) base de Sylvester tq $q(x) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2$ - $(s, r - s)$ est la signature de q (indt de la base) - recherche de la signature - def forme quad. positive, définie positive - caractérisation de la signature - ex forme quad sur $\mathbb{R}^2$ $q(x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ - 2 formes quad q et q' sont équivalentes $\Leftrightarrow \exists u \in GL(E)$ $q \circ u = q'$ - q et q' sont equiv. ssi elles ont m. signature) - Formes quadratiques positives, Espaces ~~euclidiens~~ préhilbertiens (produit scalaire = forme polaire d'une forme quad > 0 - def espace préhilbertien, esp. euclidien - ex - inégalité de Cauchy Schwarz (q quad ≥ 0 $q(x + \lambda y) \geq 0 \Rightarrow f(x, y)^2 \leq q(x) q(y)$ - $q \geq 0$ alors $\ker f =$ cone isotrope) - Norme sur un espace préhilbertien réel ($x \mapsto \sqrt{q(x)}$ - espace de Hilbert - $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$) - Th de Pythagore - écart angulaire) - Orthogonalité dans un espace euclidien (projection orthogonale, symétrie orthog. (somme directe orthogonale - proj. orth. P_F $\|x - P_F(x)\| = d(x, F)$, $P_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x \mid e_i) e_i$ où (e_i) est BON de F - sym orthog $S_F = P_F - P_{F^\perp}$, Pts) - Bases orthonormales (existence - orthonormalisation de Schmidt $(e'_1, \dots, e'_n)$ base de E $\exists!$ BON (e_i) $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \operatorname{Vect}(e'_1, \dots, e'_p)$ $(e_i \mid e'_i) > 0$) -