$M \in GL_n(\mathbb{R})$ $\exists!$ (O,T) $M = OT$, O orthog., T triang. avec des termes diag > 0 - inégalité d'Hadamard $\left(|\det M| \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}\right)$ - Étude des endomorphismes symétriques d'un esp. euclidien (u end sym. alors χ_u scindé et $E = \bigoplus E_{\lambda_i}$ (on calcul ${}^t\bar{X}AX$ où X vect. propre de A ds $\mathbb{C}^n$) - appl. A sym réelle $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ ${}^tPAP = P^{-1}AP = D_n$ - signature de q - réduction simultanée (u sym. $f_u \begin{array}{l} E^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto (u(x)|y) \end{array}$ est bilinéaire sym. $\theta \; \begin{array}{l} \mathcal{S}(E) \to \mathcal{S}_2(E,\mathbb{R}) \\ u \mapsto f_u \end{array}$ isomorphisme. $\forall$ E euclidien q quad $\exists$ BON de E orthogonale pour q - déf u sym ≥ 0, > 0 - forme matricielle A sym réelle définie positive, B sym. $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ et D diag. ${}^tPAP = I_n$ ${}^tPBP = D$)) - Étude du groupe orthog. d'un espace euclidien ($O(E)$, $SO(E) = O^+(E)$ - caract. u isométrie vectorielle ssi $u(0)=0$ $\|u(x)-u(y)\| = \|x-y\|$ $\Leftrightarrow$ $u \in O(E)$ - cas $n=1$, $n=2$ ((e_1,e_2) BON $u \in O(E)$ $\mathrm{Mat}\, u/(e_1,e_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ - $O^+(E)$ est abélien) - cas général (λ racine de χ_u ds $\mathbb{C}$ alors $|\lambda| = 1$ - $\exists$ (e_i) BON de E $\mathrm{Mat}(u/(e_i)) = \begin{pmatrix} I_p & & & 0 \\ & -I_q & & \\ & & R_1 & \\ 0 & & & \ddots R_k \end{pmatrix}$ où $R_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$ (on montre E possède un plan ou une droite stable. Si pas de vect propre ~~soit~~ x vect $\neq 0$ de $u + u^*$, $F = \mathrm{Vect}(x, u(x))$) - $u \in O(E)$ est composé d'au plus n réflexions) - Complément sur les espaces préhilbertiens réels (projection sur un s.e.v. de dim finie F s.e.v de dim finie de E alors $E = F \oplus F^\perp$ $F = F^{\perp\perp}$ (BON de F ..) - C partie convexe complète ~~et~~ $\neq \emptyset$ de E, $x \in E$ $\exists! c \in C$ $d(x,C) = d(x,c)$, c caract. par $\forall y \in C$ $(x-c|y-c) \leq 0$)

27 Produit mixte, Produit vectoriel

Orientation d'un e.v. réel (E de dim finie B et B' ont m. orient. si $\det P_B^{B'} > 0$ relation d'équivalence, 2 classes - orientation compatible d'un hyperplan lorsque E est euclidien) - Produit mixte de n vecteurs ds un esp. eucl orienté de dim n ((e_i) BOND $(a_1,\dots,a_n) \in E^n$ $[a_1,\dots,a_n] = \det_{(e_i)}(a_1,\dots,a_n)$ indt de la BOND (e_i) - Ptés) - Produit vectoriel de $n-1$ vecteurs ds un e.v. euclidien orienté de dim n ($(a_1,\dots,a_{n-1}) \in E^{n-1}$ $\exists! v \in E$ $\forall x \in E$ $[a_1,\dots,a_{n-1},x] = (v|x)$ $v = a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1}$ - Ptés $(a_1,\dots,a_{n-1}) \mapsto a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1}$ est $n-1$ linéaire alternée si $(a_1,\dots,a_{n-1})$ orthonormale, $(a_1,\dots,a_1 \wedge \dots \wedge a_n)$ est BOND, $\|v\|$ - composantes sur une BON D - Ptés en dim 3 ($\|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\| = \|\vec{v}_1\|\|\vec{v}_2\| \sin\theta$ - double produit vect. - u end antisymétrique $\Rightarrow$ $\exists! w \in E$ $\forall x \in E$ $u(x) = w \wedge x$ - division vect.)) - Rotation en dimension 2 ou 3 (mesure d'une rotation en dim 2 - axe et mesure d'une rotation en dim 3)

28 Formes sesquilinéaires hermitiennes - Espaces hermitiens

Formes sesquilinéaires (E $\mathbb{C}$ e.v $\bar{E} = (E,+,\times)$ $\lambda \times x = \bar{\lambda} x$ structure vectoriel conjuguée - déf end. semilinéaire ($u \in \mathcal{L}(E,\bar{F})$) forme sesquilinéaire, forme sesq. hermitienne, forme quad hermitienne, forme polaire, orthogonalité, vect. isotrope - $u \in GL(E)$ est dit unitaire ssi $q \circ u = q$) - Formes sesquilinéaire hermitienne en dim finie (matrice d'une f. sesq. herm. - matrice hermitienne $A = \mathrm{Mat}\, f/(e_i)$, $f(x,y) = {}^t\bar{X}AY$, $\mathrm{Mat}\, f/(e'_i) = {}^t\bar{P}_{(e_i)}^{(e'_i)} A P_{(e_i)}^{(e'_i)}$ - rg f - Orthogonalité (H s.e.v E $\dim H + \dim H^\perp = \dim E + \dim H \cap \mathrm{Ker} f$ base de Sylvester, signature)) - Formes sesq. herm. positives, Espace préhilbertien complexes (E $\mathbb{C}$ ev qcq déf produit scalaire, esp préh. compl., esp hermitien - inégalité de Cauchy Schwarz, cas d'égalité - Norme d'un esp préh. compl. (identité du parallélogramme). - Espaces hermitiens Bases orthonormales (orthonormalisation de Schmidt (e'_i) base de E $\exists!$ BON (e_i) $\forall p \in [1,n]$ $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p) = \mathrm{Vect}(e'_1,\dots,e'_p)$ et $(e_i|e'_i) \in \mathbb{R}_+^*$. $M \in GL_n(\mathbb{C})$ $\exists! (U,T)$ U unitaire T triang. sup à coef diag ds $\mathbb{R}_+^*$ tq $M = UT$) - Espaces hermitiens, adjoints ($u \in \mathcal{L}(E)$ $(x|u(y)) = (u^*(x)|y)$ $u^* = \varphi^{-1} \circ {}^tu \circ \varphi$ - Ptés de l'adjoint (matrice sur une BON, $\det u^* = \overline{\det u}$ ...) - Automorphismes unitaires (u unitaire $\Leftrightarrow u u^* = I$ $U(E)$, $SU(E)$ $U(E)/SU(E) \simeq \mathbb{U}$ - aspect matriciel (matrice de passage d'une BON à une BON)) - Espaces hermitiens, end. auto adjoints ($u = u^*$ - th les v.p de u sont réelles et $E = \bigoplus E_{\lambda_i}$ - appl à la signature de q - réduction simultanée (θ $u \mapsto f_u$ R_q si (e_i) BON $\mathrm{Mat}(u/(e_i)) = \mathrm{Mat}\, f_u/(e_i)$)) - Espaces hermitiens - endomorphismes normaux (u normal ssi $uu^* = u^*u \Leftrightarrow \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ $\Leftrightarrow$ u admet une BON de diag. - R toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est unitairement semblable à une matrice triangulaire)