DEA de mathématiques 02-03, "Algèbre catégorielle" 19 décembre 2002

Examen

Durée : 3 heures

Les deux problèmes sont indépendants. On tiendra le plus grand compte de la rédaction.

Problème I

1. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, A', A, B et C des objets de $\mathcal{C}$, f, g une paire de morphismes de A' dans A, enfin $q_1 : A \to B$ et $q_2 : B \to C$ des morphismes.

1.a Montrer que si q_2 est un épimorphisme et si la composée q_2q_1 est un coégalisateur de la paire (f, g) alors q_2 est un coégalisateur de la paire (q_1f, q_1g).

1.b. Montrer que si q_2q_1 est un épimorphisme alors q_2 est un épimorphisme.

1.c. Déduire de (a) et de (b) que si q_2q_1 est un épimorphisme régulier alors q_2 est un épimorphisme régulier.

2. On suppose que $\mathcal{C}$ possède un générateur P, c'est-à-dire un objet P tel que pour toute paire de morphismes distincts $f, g : A' \rightrightarrows A$, il existe un morphisme $\varphi : P \to A'$ tel que $f\varphi \neq g\varphi$. On suppose de plus que pour tout ensemble E, le coproduit $\sqcup_E P$ de la famille d'objets de $\mathcal{C}$ indexée par E constante égale à P existe dans $\mathcal{C}$.

2.a. Soit $f : A \to B$ un morphisme. Montrer que si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, B)$ est injective alors f est un monomorphisme.

2.b. Montrer que pour tout objet A de $\mathcal{C}$ le morphisme canonique $p_A : \sqcup_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,A)} P \to A$ est un épimorphisme.

(On rappelle que p_A est le morphisme dont la restriction à la composante P indexée par $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, A)$ est le morphisme φ.)

2.c. On dit que le générateur P est régulier si pour tout objet A de $\mathcal{C}$ le morphisme p_A est un épimorphisme régulier.

Supposons que P est régulier et soit f un morphisme $A \to B$. Montrer que si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, B)$ est surjective alors f est un épimorphisme régulier.

(On pourra écrire p_B comme une composée et utiliser (1.c).)

2.d. Déduire de (2.a) et de (2.c) que le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, -) : \mathcal{C} \to \mathcal{E}\mathrm{ns}$ détecte les isomorphismes.

Problème II

1. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, $\mathcal{I}$ la catégorie formée de deux objets 0 et 1 et des morphismes $d_0, d_1 : 1 \to 0$ et $s : 0 \to 1$ (plus les morphismes identité de 0 et de 1) soumis aux relations $d_0s = \mathrm{id}_0 = d_1s$. On appelle 1-complexe de $\mathcal{C}$ un objet de la catégorie $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ des $\mathcal{I}$-diagrammes de $\mathcal{C}$. On note $C_1 \rightleftarrows C_0$ un tel objet et on note encore d_0, d_1, s les morphismes de C_1 dans C_0 et de C_0 dans C_1 qui le constituent.

1.a. A chaque objet C de $\mathcal{C}$ on associe le 1-complexe constant $C \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} C$ formé de C et des morphismes identité $C \to C$. Montrer que la donnée d'un morphisme d'un 1-complexe $C_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} C_0$ dans le 1-complexe constant $C \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} C$ équivaut à celle d'un morphisme de C_0 dans C qui égalise les deux morphismes d_0, $d_1 : C_1 \to C_0$.

1.b. Lorsque le diagramme $C_1 \rightrightarrows C_0$ sous-jacent au diagramme $C_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} C_0$ admet un coégalisateur $C_0 \to C$ dans $\mathcal{C}$, on dit que le diagramme $C_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} C_0 \to C$ est coégalisateur ou que le morphisme $C_0 \to C$ fait de C le coégalisateur du 1-complexe $C_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} C_0$.

Soient $C_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} C_0$ et $D_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} D_0$ deux 1-complexes de $\mathcal{C}$ et f, g deux morphismes de $C_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} C_0$ dans $D_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} D_0$. On dit que f est homotope à g s'il existe un morphisme $h : C_0 \to D_1$ tel qu'on ait $f = d_0 h$ et $g = d_1 h$.

Montrer que si $C_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} C_0$ et $D_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} D_0$ admettent des coégalisateurs dans $\mathcal{C}$ et si f est homotope à g alors f et g induisent le même morphisme entre les coégalisateurs.

1.c. On dit qu'un morphisme f de $C_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} C_0$ dans $D_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} D_0$ est une équivalence d'homotopie s'il existe un morphisme g de $D_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} D_0$ dans $C_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} C_0$ et des homotopies de l'identité de $C_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} C_0$ dans gf et de l'identité de $D_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} D_0$ dans fg.

Soit f un morphisme de $C_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} C_0$ dans le 1-complexe constant $C \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} C$ qui est une équivalence d'homotopie. Montrer que le morphisme $f : C_0 \to C$ fait de C le coégalisateur dans $\mathcal{C}$ du 1-complexe $C_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} C_0$. Montrer de plus que pour tout foncteur F de $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{D}$, l'image par F de f fait de $F(C)$ le coégalisateur dans $\mathcal{D}$ du 1-complexe image $F(C_1) \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} F(C_0)$.

Lorsque f est une équivalence d'homotopie, on dira que le diagramme $C_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} C_0 \to C$ associé à f est un diagramme coégalisateur scindé.

2. On note $\mathcal{E}$ns la catégorie des ensembles et $\mathcal{A}$b celle des groupes abéliens.

2.a. Soit $A_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} A_0$ un 1-complexe de $\mathcal{A}$b. On note A_1' le noyau de la composée sd_0. Montrer que A_1 est isomorphe à la somme directe $A_1' \oplus A_0$.

2.b. Soit $\mathcal{J}$ la catégorie formée de deux objets 0 et 1 et d'un morphisme $1 \to 0$ (plus les morphismes identité de 1 et de 0). On considère la catégorie des $\mathcal{J}$-diagrammes de $\mathcal{A}$b, qu'on appelle catégorie des morphismes de $\mathcal{A}$b. (Un objet de cette catégorie est un morphisme $A_1 \to A_0$ dans $\mathcal{A}$b.)

Montrer que le foncteur de la catégorie des 1-complexes de $\mathcal{A}$b dans la catégorie des morphismes de $\mathcal{A}$b, qui associe à un 1-complexe $A_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} A_0$ le morphisme $A_1' \to A_0$ restriction de $d_1 : A_1 \to A_0$ à $\mathrm{Ker}(sd_0)$, est une équivalence de catégories dont on explicitera un inverse.

A quoi correspond par cette équivalence de catégories la relation d'homotopie entre morphismes de 1-complexes de $\mathcal{A}$b ? la notion de coégalisateur de 1-complexe de $\mathcal{A}$b ? la notion de diagramme coégalisateur scindé de $\mathcal{A}$b ? Montrer que la relation d'homotopie entre morphismes de 1-complexes de $\mathcal{A}$b est une relation d'équivalence.

2.c. Soient $A_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} A_0$ un 1-complexe de $\mathcal{A}$b et $A_0 \to A$ son coégalisateur. Montrer que le diagramme sous-jacent d'ensembles $A_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} A_0 \to A$ est un diagramme coégalisateur scindé dans $\mathcal{E}$ns.

3. (hors barème) Soit G une monade sur la catégorie des ensembles. On note $\mathcal{E}\mathrm{ns}(G)$ la catégorie des G algèbres de $\mathcal{E}$ns. (Rappelons que G est un foncteur $\mathcal{E}\mathrm{ns} \to \mathcal{E}\mathrm{ns}$ muni de transformations naturelles $G \circ G \to G$ et $\mathrm{Id} \to G$ vérifiant les axiomes d'un monoïde et qu'une G-algèbre est un ensemble M muni d'une application $G(M) \to M$ vérifiant les axiomes d'une action.)

3.a. Vérifier que pour tout ensemble S l'application $(G \circ G)(S) \to G(S)$ fait de $G(S)$ une G-algèbre naturelle en S et qu'on a pour toute G-algèbre M une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}\mathrm{ns}(G)}(G(S), M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}\mathrm{ns}}(S, M) .$$

3.b. Soit $S(-)$ un diagramme d'ensembles dont on note S la colimite. Quelle est la colimite dans $\mathcal{E}\mathrm{ns}(G)$ du diagramme induit $G(S(-))$?

3.c. Soit M une G-algèbre. On lui associe le 1-complexe de G-algèbres formé des morphismes $(G \circ G)(M) \to G(M)$, $G(G(M) \to M)$ et $G(M \to G(M))$. Montrer que le diagramme $(G \circ G)(M) \leftrightarrows G(M) \to M$ est un diagramme coégalisateur scindé dans $\mathcal{E}\mathrm{ns}$.

3.d. Soient $M_1 \leftrightarrows M_0$ un 1-complexe de G-algèbres et $M_0 \to M$ son coégalisateur dans $\mathcal{E}\mathrm{ns}$. On suppose que le diagramme $M_1 \leftrightarrows M_0 \to M$ est scindé dans $\mathcal{E}\mathrm{ns}$. Montrer qu'il existe un morphisme naturel $G(M) \to M$ faisant de M une G-algèbre et faisant du diagramme $M_1 \leftrightarrows M_0 \to M$ un diagramme coégalisateur dans $\mathcal{E}\mathrm{ns}(G)$.
(Indication : considérer l'image par G et $G \circ G$ du diagramme $M_1 \leftrightarrows M_0 \to M$.)
En déduire que si les coégalisateurs dans $\mathcal{E}\mathrm{ns}$ des 1-complexes de G-algèbres sont scindés alors $\mathcal{E}\mathrm{ns}(G)$ possède toutes les colimites indexées par une catégorie petite.

3.e. Soient k un corps (commutatif) et Alg_k la catégorie des algèbres commutatives sur k. Montrer que Alg_k s'identifie à la catégorie des G-algèbres de $\mathcal{E}\mathrm{ns}$ pour une monade G à expliciter. Montrer que les colimites existent dans Alg_k. (Indication : on pourra utiliser ce qui précède et le résultat de 2.c.)
Le foncteur oubli $\mathrm{Alg}_k \to \mathcal{E}\mathrm{ns}$ commute t-il aux colimites ?