UNSA 2003/2004, DEA "Algèbre catégorielle", 18 décembre 2003.
Durée : 3 heures. Les notes du cours sont autorisées
Une rédaction claire et précise sera appréciée.

1) Générateurs stricts.

On considère une catégorie $\mathcal{C}$ ayant des produits fibrés et des coproduits indexés par des ensembles. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ est dit *conservatif* si un morphisme f de $\mathcal{C}$ est un isomorphisme dès que Ff est bijectif. Un objet G de $\mathcal{C}$ est un *générateur strict* si $\mathcal{C}(G, -) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ est conservatif. Un épimorphisme f est *extrémal* si dans toute factorisation $f = mf'$ tel que m est un monomorphisme, m est en fait un isomorphisme.

1.a. Montrer que tout épimorphisme extrémal est strict. Indication: si $qf = mg$ avec f extrémal et m mono, former le produit fibré de q et m.

1.b. Montrer que tout foncteur conservatif qui préserve les égalisateurs est un foncteur fidèle. En déduire qu'un générateur strict est un générateur.

1.c. Montrer que pour un générateur strict G et un objet C de $\mathcal{C}$, le morphisme canonique $\gamma_C : \coprod_{\mathcal{C}(G,C)} G \to C$ est un epimorphisme strict. On rappelle que γ_C est défini par la propriété $\gamma_C i_\phi = \phi$ pour la composante $i_\phi : G \to \coprod_{\mathcal{C}(G,C)} G$ correspondant à $\phi : G \to C$. Indication : montrer que si $\gamma_C = m\gamma'_C$ avec m mono, alors $\mathcal{C}(G, m)$ est bijectif.

1.d. Montrer inversement que si γ_C est un épimorphisme strict pour tout objet C de $\mathcal{C}$, alors G est un générateur strict.

1.e. Montrer qu'un objet terminal de la catégorie des ensembles est un générateur strict, mais qu'un objet terminal de la catégorie des espaces topologiques n'est pas un générateur strict. Montrer que tout générateur d'une catégorie abélienne est strict.

2) Carrés cocartésiens dans $\mathcal{A}$b.

On considère le carré commutatif (*) de groupes abéliens

$$\begin{array}{ccc} A & \to & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \to & D \end{array}$$

les morphismes verticaux étant des monomorphismes.

2.a. Montrer qu'on a des morphismes canoniques $\alpha : B/A \to D/C$ et $\beta : B \cup_A C \to D$.

2.b. Montrer que le carré (*) est cocartésien si et seulement si α est un isomorphisme. Indication : traiter d'abord le cas $C = 0$ et utiliser ensuite les propriétés de transitivité des carrés cocartésiens.

2.c. Montrer d'abord que le morphisme $C \to B \cup_A C$ est un monomorphisme et qu'on a un morphisme canonique $\gamma : (B \cup_A C)/C \to D/C$. Montrer ensuite qu'on a un isomorphisme $Ker(\beta) \cong Ker(\gamma)$. Indication : on pourra considérer le carré

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & B \cup_A C \\ \downarrow & & \downarrow \\ D & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & D \end{array}$$

2.d. Conclure que α est un monomorphisme si et seulement si β est un monomorphisme.

3) Pour S un ensemble, on note $\mathbb{Z}[S]$ l'ensemble des familles $(\lambda_s)_{s\in S}$ d'éléments de $\mathbb{Z}$ indexées par S et à support fini (le groupe abélien libre de base S). Pour s un élément de S, on note δ_s la famille qui vaut 1 en s et 0 ailleurs.

a) Soit A un groupe abélien. On définit les morphismes de groupes abéliens $\mathbb{Z}[A] \to A$ par $(\lambda_a) \mapsto \sum_{a\in A} \lambda_a \cdot a$ et $\partial_A : \mathbb{Z}[\mathbb{Z}[A]] \to \mathbb{Z}[A]$ par $\delta_{(\lambda_a)} \mapsto (\lambda_a) - \delta_{\sum_a \lambda_a \cdot a}$ (étendu par linéarité). Montrer que la suite

$$\mathbb{Z}[\mathbb{Z}[A]] \xrightarrow{\partial_A} \mathbb{Z}[A] \to A$$

induit un isomorphisme $\mathrm{coker}\partial_A \to A$.

b) Montrer qu'on a pour toute paire d'ensembles S, T et pour tout groupe abélien C une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\mathrm{b}}(\mathbb{Z}[S], \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\mathrm{b}}(\mathbb{Z}[T], C)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\mathrm{b}}(\mathbb{Z}[S \times T], C) \ .$$

Montrer que toute paire de morphismes de groupes abéliens $\mathbb{Z}[S] \to \mathbb{Z}[S']$ et $\mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}[T']$ induit un morphisme de groupes abéliens $\mathbb{Z}[S \times T] \to \mathbb{Z}[S' \times T']$.

c) Soient A, B deux groupes abéliens. On note $A \otimes B$ le conoyau du morphisme $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}[A] \times \mathbb{Z}[B]] \to \mathbb{Z}[A \times B]$ induit par ∂_A et ∂_B. Montrer qu'on a une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\mathrm{b}}(A, \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\mathrm{b}}(B, C)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\mathrm{b}}(A \otimes B, C) \ .$$

d) Montrer que pour A fixé, le foncteur $B \mapsto A \otimes B$ est additif et exact à droite.

e) Calculer $A \otimes \mathbb{Z}$, $A \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Le foncteur $A \mapsto A \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il exact à gauche ?

4) Soit $\mathcal{A}$ une catégorie admettant un objet initial ι, un objet terminal τ, et pour toute paire d'objets (A, B), une somme et un produit de A et B (notés respectivement $A \sqcup B$ et $A \times B$).

a) On suppose l'existence d'un morphisme $\tau \to \iota$. Montrer que ce morphisme est un isomorphisme et que deux tels morphismes coïncident.

b) Pour A, B deux objets de $\mathcal{A}$ on note $I_{A,B}$ le morphisme $A \sqcup B \to A \times B$ correspondant au quadruplet

$$(\mathrm{Id}_A, A \to \tau \cong \iota \to B, B \to \tau \cong \iota \to A, \mathrm{Id}_B)$$

via l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A \sqcup B, A \times B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, B) \ .$$

On suppose que pour tout couple d'objets (A, B), le morphisme $I_{A,B}$ est un isomorphisme. Montrer qu'on en déduit pour tout objet B un morphisme naturel $B \times B \to B$ induisant, pour tout objet A, une loi commutative, associative et unitaire sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ naturelle en A et B.

c) Montrer que la loi ainsi obtenue sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ ne dépend pas du choix de l'objet initial, terminal, de la somme et du produit dans $\mathcal{A}$.

5) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie possédant les produits finis (en particulier un objet terminal τ). On note $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ la catégorie des objets en groupes abéliens de $\mathcal{C}$, qu'on peut décrire comme suit :

Ses objets sont les couples formés d'un objet A de $\mathcal{C}$ et d'un morphisme $A \times A \to A$ faisant de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ un groupe abélien naturel en $C \in \mathcal{C}$.

Ses morphismes entre deux objets $(A, A \times A \to A)$ et $(B, B \times B \to B)$ sont les morphismes $A \to B$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \to & B \times B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \to & B \end{array} \ .$$

On dispose du foncteur oubli $\mathcal{O} : \mathcal{C}_{\mathrm{ab}} \to \mathcal{C}$, $(A, A \times A \to A) \mapsto A$.

a) Montrer que la catégorie $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ possède les produits finis (en particulier un objet terminal) et que l'oubli $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}} \to \mathcal{C}$ commute aux produits.

b) Montrer que la donnée d'une structure de groupe abélien sur les ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ naturelle en A et B équivaut à la donnée d'une section de l'oubli $\mathcal{O}$, c'est-à-dire un foncteur $\mathcal{S} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ tel que la composée $\mathcal{O}\mathcal{S}$ est le foncteur identité. Montrer que si une telle structure existe alors τ est un objet initial de $\mathcal{C}$ et que le produit de deux objets de $\mathcal{C}$ est aussi une somme.

c) Vérifier qu'à toute structure de catégorie additive sur $\mathcal{C}$ correspond une structure de catégorie additive sur la catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ de $\mathcal{C}$. Comment s'exprime la structure d'objet en groupe abélien d'un objet A de $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ en terme de morphisme dans $\mathcal{C}$?

d) Soit $(A, A \times A \to A)$ un objet en groupe abélien de $\mathcal{C}$. On note $*$ la loi de groupe sur les ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$, C décrivant $\mathcal{C}$, associée. On suppose pour cette question que $\mathcal{C}$ possède une structure de catégorie additive, de sorte qu'on a une loi de groupe abélien sur les ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$, naturelle en C et C', qu'on note $+$. Montrer que pour tout objet $C \in \mathcal{C}$ et tout quadruplet (x, x', y, y') d'éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ on a la relation

$$(x * x') + (y * y') = (x + y) * (x' * y') \ .$$

(On pourra observer que $(A, A \times A \to A)$ est un objet en groupe abélien de $((\mathcal{C}^{\mathrm{opp}})_{\mathrm{ab}})^{\mathrm{opp}}$.)

e) Montrer que si l'oubli $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}} \to \mathcal{C}$ admet une section, alors c'est un isomorphisme (c'est à dire il existe un foncteur $\mathcal{S} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ tel que les composées $\mathcal{O}\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}\mathcal{O}$ sont les foncteurs identité).

f) *Difficile.* Peut-on répondre à la question e) sans supposer l'existence des produits finis dans $\mathcal{C}$?