Algèbre catégorielle - TD "catégories abéliennes" - 20 novembre 2003

On note $\mathcal{G}$r la catégorie des groupes et $\mathcal{A}$b celle des groupes abéliens.

1. Montrer que tout monomorphisme, respectivement épimorphisme, de $\mathcal{A}$b est un noyau, respectivement conoyau. Qu'en est-il dans $\mathcal{G}$r ?

Montrer que le coégalisateur d'un diagramme $A \rightrightarrows B$ de $\mathcal{A}$b s'interprète comme un conoyau. Qu'en est-il dans $\mathcal{G}$r ?

2. Soit $0 \to A \to B \to C \to 0$ une suite exacte de groupes abéliens. Montrer que B est isomorphe à $A \times C$ comme ensemble.

On dit que la suite exacte $0 \to A \to B \to C \to 0$ est scindée si $B \to C$ admet une section dans $\mathcal{A}$b. Toute telle suite exacte est-elle scindée ? Montrer que si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est scindée alors B est isomorphe à $A \times C$ comme groupe abélien. La réciproque est-elle vraie ?

3. Montrer que tout diagramme commutatif de groupes abéliens

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A' & \to & B' & \to & C' & \to & 0 \end{array}$$

où les suites horizontales sont exactes induit une suite exacte naturelle

$$0 \to \mathrm{Ker}(A \to A') \to \mathrm{Ker}(B \to B') \to \mathrm{Ker}(C \to C') \to \mathrm{coker}(A \to A')$$
$$\to \mathrm{coker}(B \to B') \to \mathrm{coker}(C \to C') \to 0.$$

3. Soient M un groupe abélien et $M = F_0M \supset F_1M \supset \cdots \supset F_nM \supset \cdots$ une filtration décroissante de M par des (sous-)groupes abéliens. On munit M de la topologie la plus grossière qui rend les projections $M \to M/F_nM$ continues, où les M/F_nM sont munis de la topologie discrette.
Montrer que M est séparé pour cette topologie si et seulement si l'intersection $\cap_{n\in\mathbb{N}}F_nM$ est le groupe nul.

Pour $x \in M$ on pose $v(x) = \sup\{n \in \mathbb{N}, x \in F_nM\}$, avec éventuellement $v(x) = \infty$, et pour $x, y \in M$ on pose $d(x, y) = \exp(-v(x - y))$. On suppose que M est séparé. Montrer alors que d est une distance et que la topologie de M coïncide avec celle associée à d.
Caractériser les suites de Cauchy de M en terme de leurs projections dans les quotients M/F_nM.

On note $\hat{M}$ la limite de la tour $(M/F_nM)_n$ et on définit $F_n\hat{M} = \mathrm{Ker}(\hat{M} \to M/F_nM)$. Montrer que $\hat{M}$ est séparé pour cette filtration. Montrer que $(\hat{M}, d)$ est un espace métrique complet. Quelle est la limite d'une suite de Cauchy de M dans la limite de la tour $(M/F_nM)_n$?

4. Soit M un groupe abélien muni d'une filtration décroissante $(F_nM)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'on regarde comme une tour de groupes abéliens. On pose $\lim^1(F_nM)_n = \mathrm{coker}(M \to \lim(M/F_nM)_n)$.
Exemple : On considère $\mathbb{Z}$ muni de la filtration formée des $2^n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\lim(2^n\mathbb{Z})_n$ et $\lim^1(2^n\mathbb{Z})_n$.
Montrer que toute suite $0 \to A \to B \to C \to 0$ de groupes abéliens filtrés telle que les suites $0 \to F_nA \to F_nB \to F_nC \to 0$ sont exactes pour tout n induit une suite exacte

$$0 \to \lim_n F_nA \to \lim_n F_nB \to \lim_n F_nC \to \lim^1_n F_nA \to \lim^1_n F_nB \to \lim^1_n F_nC \to 0\ .$$

5. La catégorie des groupes abéliens filtrés est-elle abélienne ? Montrer que la catégorie $\mathcal{A}\mathrm{b}^{\mathbb{N}}$ des tours de groupes abéliens et transformations naturelles entre tours est abélienne. Le foncteur $\lim : \mathcal{A}\mathrm{b}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{A}\mathrm{b}$ est-il exact ?

6. Soit (M_n) une tour de groupes abéliens et notons M_∞ sa limite. On définit une filtration sur M_∞ par $F_nM_\infty = \mathrm{Ker}(M_\infty \to M_{n-1})$. Montrer que les groupes abéliens $\lim(F_nM_\infty)_n$ et $\lim^1(F_nM_\infty)_n$ sont nuls, autrement dit que M_∞ est séparé et complet pour sa filtration.

7. Soient $\mathbb{K}$ un corps, M un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une filtration décroissante $(F_nM)_n$ par des sous-espaces vectoriels. Montrer que si pour tout entier n F_nM est de dimension finie sur $\mathbb{K}$ alors $\lim^1(F_nM)_n$ est nul. Ce résultat est-il encore vrai si on remplace l'hypothèse $\mathbb{K}$ corps par $\mathbb{K}$ anneau principal ?