Algèbre catégorielle - TD sur les épimorphismes - 9 octobre 2003

Dans ce qui suit $\mathcal{C}$ est une catégorie et $f : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}$.

Rappel.
f est un monomorphisme si pour tout objet $C \in \mathcal{C}$, l'application $\mathrm{Hom}(C, A) \to \mathrm{Hom}(C, B)$, $g \mapsto f \circ g$ est injective.
f est un épimorphisme si pour tout objet $C \in \mathcal{C}$, l'application $\mathrm{Hom}(B, C) \to \mathrm{Hom}(A, C)$, $g \mapsto g \circ f$ est injective, c'est-à-dire si f est un monomorphisme de la catégorie opposée à $\mathcal{C}$.

1. Montrer que si f admet une section alors f est un épimorphisme. Etudier la réciproque dans les cas où $\mathcal{C}$ est la catégorie $\mathcal{E}$ns des ensembles, $\mathcal{T}$op des espaces topologiques, $\mathcal{M}$on des monoïdes, $\mathcal{G}$r des groupes, $\mathcal{A}$b des groupes abéliens.

2. Dualement montrer que si f admet un rétract alors f est un monomorphisme. Etudier la réciproque dans les cas précités.

3. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(a) f est un isomorphisme.

(b) f est un épimorphisme et admet un rétract.

(c) f est un monomorphisme et admet une section.

4. Vérifier que si f est un isomorphisme alors f est un monomorphisme et un épimorphisme. Etudier la réciproque dans les cas précités.

5. Soit $\mathcal{O} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur fidèle. Montrer que si $\mathcal{O}(f)$ est un épimorphisme, respectivement un monomorphisme, alors f est un épimorphisme, respectivement un monomorphisme. Etudier la réciproque lorsque $\mathcal{O}$ est le foncteur “oubli” $\mathcal{T}$op $\to$ $\mathcal{E}$ns, $\mathcal{M}$on $\to$ $\mathcal{E}$ns, $\mathcal{G}$r $\to$ $\mathcal{E}$ns, $\mathcal{A}$b $\to$ $\mathcal{E}$ns.