Cours “Algèbre catégorielle”, 7 nov. 2002
Exercices sur les limites

Dans tout le texte $\mathcal{C}$ désigne une catégorie.

1. Soient $\mathcal{I}$ une petite catégorie et $X(-)$ un foncteur $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$. On suppose que les produits indexés par un ensemble existent dans $\mathcal{C}$. Montrer que $X(-)$ admet une limite si et seulement si le diagramme $\prod_i X(i) \rightrightarrows \prod_{i\to j} X(j)$ admet un égalisateur, où les composantes $\prod_i X(i) \to X(j)_{i\to j}$ sont les morphismes $\mathrm{pr}_{X(j)}$ et $X(i \to j) \circ \mathrm{pr}_{X(i)}$, auquel cas ces deux termes sont canoniquement isomorphes.

Faire le lien avec la description de la limite d'un diagramme d'ensembles.

2. Montrer que les notions d'égalisateur d'un diagramme $A \rightrightarrows B$ et de produit fibré du diagramme $B \to B \times B \leftarrow A$ coïncident, où $B \to B \times B$ a pour composantes l'identité de B et où $A \to B \times B$ a pour composantes les deux morphismes $A \to B$.

En déduire que toute limite finie (hors l'objet final) s'exprime à l'aide des seuls produits fibrés.

3. Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux catégories petites et $X(-)$ un foncteur $\mathcal{I} \times \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. On suppose que pour tout objet $i \in \mathcal{I}$ l'objet $\lim_j X(i,j)$ existe et que l'objet $\lim_i(\lim_j X(i,j))$ existe.

Montrer que $X(-)$ admet une limite et que celle-ci est canoniquement isomophe à $\lim_i(\lim_j X(i,j))$.

3bis. Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux catégories petites et $X(-)$ un foncteur $\mathcal{I} \sqcup \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Montrer que la limite de $X(-)$ coïncide avec le produit des limites des restrictions de $X(-)$ à $\mathcal{I}$ et à $\mathcal{J}$, si ce dernier objet existe.

4. Enoncer les versions duales des résultats précédents (concernant les colimites).

5. Une petite catégorie $\mathcal{I}$ est dite cofiltrante si elle vérifie les deux conditions suivantes :

(i) Pour tout couple d'objets (i, j) il existe un objet k et des morphismes $i \to k$ et $j \to k$.

(ii) Pour tout couple de morphismes $i \rightrightarrows j$ entre deux objets de $\mathcal{I}$ il existe un objet k et un morphisme $j \to k$ égalisant les deux morphismes $i \to j$.

Soit $\mathcal{I}$ une petite catégorie cofiltrante. On considère le foncteur colim : $\mathcal{E}\mathrm{ns}^{\mathcal{I}} \to \mathcal{E}\mathrm{ns}$. Montrer que ce foncteur commute aux limites finies.

Plus difficile

6. Trouver un contre-exemple à l'énoncé dual de **5**.

7. Généraliser autant que possible **3** et **3bis**.