UNSA, DEA 2003/2004, Examen du 11 mars 2004.
"Représentations linéaires des groupes symétriques"

L'espace hermitien des fonctions centrales $f : \mathrm{S}_n \to \mathbb{C}$ est noté $R(\mathrm{S}_n)$. Son produit hermitien est défini par $< f, g >= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \overline{f(\sigma)} g(\sigma)$.

Les représentations (V, ρ_V) sont de dimension finie et ρ_V désigne à la fois l'action de groupe $\mathrm{S}_n \to \mathrm{Gl}(V)$ et l'action d'algèbre $\mathbb{C}[\mathrm{S}_n] \to \mathrm{End}(V)$, i.e. $\rho_V(\sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} f(\sigma)\sigma) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} f(\sigma)\rho_V(\sigma) : V \to V$.

Le caractère de (V, ρ_V) est noté $\chi_V \in R(\mathrm{S}_n)$. Chaque partition $\lambda \vdash n$ définit une représentation irréductible Sp^λ de dimension f^λ et de caractère χ_λ.

On note $triv_n$ (resp. sgn_n) le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 muni de l'action triviale (resp. signature) de S_n. Chaque partition $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \vdash n$ définit un sous-groupe $\mathrm{S}_\lambda \cong \mathrm{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathrm{S}_{\lambda_k}$ de S_n. On note $M^\lambda = \mathbb{C}[\mathrm{S}_n/\mathrm{S}_\lambda]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de base $\mathrm{S}_n/\mathrm{S}_\lambda$. L'action de S_n sur M^λ se déduit par linéarité de l'action de S_n sur $\mathrm{S}_n/\mathrm{S}_\lambda$. Plus généralement, toute représentation pour laquelle il existe une base E stable sous l'action de S_n sera notée $\mathbb{C}[E]$ et appelée *permutative*. Deux représentations V et W sont dites *adjacentes* si $< \chi_V, \chi_W >= 1$.

I. Caractères irréductibles et idempotents centraux.

I.1. Montrer qu'un élément $x = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} f_x(\sigma)\sigma$ est central dans $\mathbb{C}[\mathrm{S}_n]$ (*i.e.* $\forall y \in \mathbb{C}[\mathrm{S}_n] : xy = yx$) si et seulement si $f_x \in R(\mathrm{S}_n)$.

I.2. Rappeler pourquoi $f = \sum_{\lambda \vdash n} < \chi_\lambda, f > \chi_\lambda$ pour tout $f \in R(\mathrm{S}_n)$. En déduire à l'aide de I.1 que tout élément central $x \in \mathbb{C}[\mathrm{S}_n]$ s'écrit sous la forme $x = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} (\sum_{\lambda \vdash n} < \chi_\lambda, f_x > \chi_\lambda(\sigma))\sigma$.

I.3. Soit $x \in \mathbb{C}[\mathrm{S}_n]$ central. Montrer que $\rho_{\mathrm{Sp}^\lambda}(x) \in \mathrm{End}_{\mathrm{S}_n}(\mathrm{Sp}^\lambda)$. Déduire de la linéarité de la trace que $Tr(\rho_{\mathrm{Sp}^\lambda}(x)) = n! < \chi_\lambda, f_x >$ (On pourra utiliser que $\chi_\lambda(\sigma) = \chi_\lambda(\sigma^{-1})$). Conclure que $\rho_{\mathrm{Sp}^\lambda}(x) = \frac{n!}{f^\lambda} < \chi_\lambda, f_x > id_{\mathrm{Sp}^\lambda}$.

I.4. Soit $x \in \mathbb{C}[\mathrm{S}_n]$ central et idempotent (*i.e.* $x^2 = x$). On pose $\mathrm{supp}(x) = \{\lambda \vdash n \,|\, \rho_{\mathrm{Sp}^\lambda}(x) \neq 0\}$. Montrer que $\rho_{\mathrm{Sp}^\lambda}(x)$ est soit l'application nulle soit l'identité. Déduire de I.2 et I.3 que $x = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} (\sum_{\lambda \in \mathrm{supp}(x)} \frac{f^\lambda}{n!} \chi_\lambda(\sigma))\sigma$. Expliciter cette formule pour l'unité de l'algèbre $\mathbb{C}[\mathrm{S}_n]$.

I.5. Montrer que toute algèbre A, qui est produit d'algèbres $A \cong A_1 \times A_2$, contient des idempotents centraux e_1, e_2 tels que $e_1 + e_2 = 1$ et $e_1 e_2 = 0$. Indication : poser $e_1 = (1_{A_1}, 0_{A_2})$ et $e_2 = (0_{A_1}, 1_{A_2})$. En déduire que $\mathbb{C}[\mathrm{S}_n]$ contient une famille d'idempotents centraux $(e_\lambda)_{\lambda \vdash n}$ tels que $\sum_{\lambda \vdash n} e_\lambda = 1$ et, si $\lambda \neq \mu$, $e_\lambda e_\mu = 0$ et $\mathrm{supp}(e_\lambda) = \{\lambda\}$.

I.6. Déduire de I.4 et I.5 la formule $e_\lambda = \frac{f^\lambda}{n!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \chi_\lambda(\sigma)\sigma$. Expliciter les idempotents centraux $(e_\lambda)_{\lambda \vdash n}$ pour $n = 2$ et $n = 3$.

II. Calcul de $\chi_{(n-1,1)}$.

II.1. Montrer que le caractère d'une représentation permutative $\mathbb{C}[E]$ se calcule par la formule $\chi_{\mathbb{C}[E]}(\sigma) = \mathrm{card}\{e \in E \,|\sigma.e = e\}$, $\sigma \in \mathrm{S}_n$.

II.2. On munit $\mathbb{C}^n$ de la base canonique $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et on étend par linéarité l'action $e_i \mapsto e_{\sigma(i)}, \sigma \in \mathrm{S}_n$, à tout $\mathbb{C}^n$. Déduire de II.1 que le caractère $\chi_{\mathbb{C}^n}$ de cette représentation permutative vérifie que $\chi_{\mathbb{C}^n}(\sigma)$ est égal au nombre de 1-cycles d'une décomposition de σ en cycles disjoints.

II.3. Vérifier que $<\chi_{\mathbb{C}^n} - \chi_{triv_n}, \chi_{\mathbb{C}^n} - \chi_{triv_n}>= 1$ pour $n = 2, 3, 4$.

II.4. Décrire la classe de λ-tableaux qui correspond à un élément $\bar{t} \in \mathrm{S}_n/\mathrm{S}_\lambda$. On fixe $\lambda = (n-1, 1)$. Montrer que l'application $\bar{t} \mapsto e_{t(2,1)}$, où $t(2,1)$ est l'élément situé sur la deuxième ligne d'un représentant de $\bar{t}$ est bien définie et induit un isomorphisme de représentations $\phi : M^{(n-1,1)} \cong \mathbb{C}^n$.

II.5. Montrer que $e_1 + \cdots + e_n$ est fixe sous l'action de S^n et que son orthogonal $(e_1 + \cdots + e_n)^\perp$ admet $(e_i - e_1)_{i=2,\ldots,n}$ comme base.

II.6. Montrer que pour tout $(n-1, 1)$-tableau standard t, l'isomorphisme ϕ de II.4 transforme l'élément $K_t\bar{t} \in \mathrm{Sp}^{(n-1,1)}$ sur un élément de la forme $e_i - e_1, i = 2, \ldots, n$. En déduire à l'aide de II.5 un isomorphisme $\mathrm{Sp}^{(n-1,1)} \cong (e_1 + \cdots + e_n)^\perp$.

II.7. Déduire de II.6 que $\chi_{\mathbb{C}_n} = \chi_{triv_n} + \chi_{(n-1,1)}$. La formule II.3 est-elle vraie pour tout $n \geq 2$?

III. Représentations permutatives et réciprocité de Frobenius.

III.1 Montrer que $<\chi_{triv_n}, \chi_{\mathbb{C}[E]}>$ est égal au nombre de S_n-orbites de E. Indication : déduire de II.1 que

$$<\chi_{triv_n}, \chi_{\mathbb{C}[E]}>= \frac{1}{n!}\mathrm{card}\{(\sigma, e) \in \mathrm{S}_n \times E \,|\, \sigma.e = e\} = \frac{1}{n!}\sum_{e \in E} \mathrm{card}(\mathrm{Stab}(e))$$

et conclure en décomposant E en orbites.

III.2. Montrer que $<\chi_{sgn_n}, \chi_{\mathbb{C}[E]}>$ est égal au nombre de S_n-orbites de E à stabilisateur composé de permutations paires.

III.3. Montrer que $<\chi_{M^\mu}, \chi_{\mathbb{C}[E]}>$ est égal au nombre de S_μ-orbites de E. Indication : appliquer la réciprocité de Frobenius à $M^\mu = (triv_n \downarrow \mathrm{S}_\mu) \uparrow \mathrm{S}_n$.

III.4. Trouver une représentation A^μ telle que $<\chi_{A^\mu}, \chi_{\mathbb{C}[E]}>$ soit égale au nombre de S_μ-orbites de E à stabilisateur composé de permutations paires.

IV. Représentations adjacentes et tableaux de Young.

IV.1. Montrer que deux représentations V et W sont adjacentes si et seulement s'il existe une unique représentation irréductible qui apparaît simultanément dans V et W, et ceci avec multiplicité 1.

IV.2. Montrer qu'il existe à un scalaire près un unique morphisme de représentations entre deux représentations adjacentes. Quel est son image ?

IV.3. Rappeler pourquoi $\mathrm{S}_n/\mathrm{S}_\lambda$ est en bijection avec l'ensemble des λ-tableaux ayant des lignes strictement croissantes. A un tel λ-tableau t, on associe un λ-semitableau $\mu(t)$ en remplaçant les μ_1 premiers entiers de t par 1, les μ_2 entiers suivants de t par 2, et ainsi de suite. Montrer que deux λ-tableaux t et t' vérifient $\mu(t) = \mu(t')$ si et seulement s'il existe $\sigma \in \mathrm{S}_\mu$ tel que $\sigma.t = t'$.

IV.4. Déduire de IV.3 une bijection canonique entre l'ensemble des S_μ-orbites de $\mathrm{S}_n/\mathrm{S}_\lambda$ à stabilisateur trivial et l'ensemble des λ-semitableaux μ-standards (*i.e.* des tableaux de forme λ ayant μ_j occurrences de j et ayant des lignes strictement croissantes). Montrer que si λ' désigne la partition duale de λ, alors il n'existe qu'un seul λ-semitableau λ'-standard.

IV.5. En admettant que tout stabilisateur non-trivial d'une S_μ-orbite de $\mathrm{S}_n/\mathrm{S}_\lambda$ contient des permutations impaires, déduire de III.4 et IV.4 que $< A^\mu, M^\lambda >$ est égal au nombre de λ-semitableaux μ-standards. En particulier, conclure que $A^{\lambda'}$ et M^λ sont des représentations adjacentes. Quelle est la composante irréductible commune? Comment la construire à partir de $A^{\lambda'}$ et M^λ?