Cours Produits dérivés M1 IM
Université Nice Sophia-Antipolis

François Delarue

CHAPITRE 1

Actifs et exemples de dérivés

Dans ce chapitre, nous discutons de la notion d'actif financier et d'actif dérivé. Il s'agit en particulier d'introduire les exemples typiques de contrats utilisés sur les marchés financiers et des différentes façons de les utiliser.

1. Principes

1.1. Ressources économiques. On entend par actif ou par ressource économique tout bien dont la possession est valorisée. Les exemples fondamentaux d'actifs sont

(1) les matières premières, telles que le pétrole, le gaz naturelle, les céréales...
(2) les actions, c'est-à-dire les parts du capital d'une société, telles que celles côtées au sein d'indices CAC 40 (40 plus grandes capitalisations de la place de Paris),
(3) les devises ou monnaies, telles que l'euro, le dollar, la livre sterling, le yen...

1.2. Dérivés. Les dérivés sont des actifs financiers dont la valeur dépend d'un autre actif, le plus souvent fondamental. Le but de ce cours est de discuter quelques exemples de produits dérivés de base. Nous nous focaliserons sur

(1) les contrats 'forward' ou 'futures',
(2) les options.

Les contrats 'forward' ou 'futures' sont des engagements fermes, décidés à un instant initial donné 0, à acheter ou à ventre à une échéance T initialement fixée et à un prix d'exercice K initialement fixé un actif fondamental. L'investisseur détient une 'position longue' si le contrat porte sur l'achat de l'actif et une 'position courte' si le contrat porte sur la vente de l'actif. La différence entre contrats 'forward' et 'futures' tient essentiellement aux marchés sur lesquels les contrats sont passés : les contrats 'futures' font références à des marchés institutionnalisés alors que les contrats 'forward' désignent des transactions de gré à gré entre banques. En pratique, les prix 'forward' sont l'objet de cotations : prix du pétrole à échéance de 6 mois, prix du dollar en euro à échéance de 3 mois...

A la différence des contrast forward ou futures, les 'options' désignent des contrats optionnels. Le détenteur de l'option a le droit, s'il le souhaite, d'acheter ou de vendre l'actif sur lequel porte le contrat au prix d'exercice initialement fixé. Autrement dit, l'engagement à acheter ou à vendre n'est qu'optionnel. Une option d'achat est appelée 'call' et une option de vente 'put'. En pratique, de nombreux types d'option existent, les règles d'utilisation pouvant varier d'une option à l'autre. Deux classes essentielles sont à retenir : les options européennes désignent des options pour lesquelles l'achat ou la vente de l'actif ne peuvent avoir lieu qu'à l'échéance (on dit aussi à la maturité) du contrat ; les options américaines désignent des options pour lesquelles l'achat ou la vente de l'actif peuvent avoir lieu à n'importe quel instant entre la souscription du contrat et son échéance.

2. Notion de courverture

Les contrats forward et les options sont des actifs très utilisés en pratique. Différents acteurs peuvent s'en servir.

2.1. Utilisations d'un contrat. On peut distinguer trois types principaux d'utilisation des contrats décrits dans la section précédente :

(1) Un investisseur peut décider d'utiliser un contrat pour se 'couvrir', c'est-à-dire se 'prémunir', face au risque engendré par les fluctuations de l'actif sur lequel porte le contrat.

    Par exemple, une compagnie aérienne peut vouloir se prémunir contre la hausse du prix du pétrole. Ou, de façon similaire, un constructeur aérien, dont les coûts de production sont en euros mais dont les ventes sont effectuées en dollars, peut vouloir se prémunir contre le risque d'une baisse du dollar contre l'euro.

(2) Un investisseur peut utiliser un contrat pour spéculer. Il s'agit pour lui de faire fructifier son capital en anticipant de façon juste l'évolution de l'économie.

(3) Un investisseur peut chercher à utiliser les produits dérivés pour réaliser un arbitrage. Il s'agit le cas échéant de 'faire de l'argent' sans risques, en tirant parti d'éventuels défauts du système tels que les différences de cotation. Par exemple, si une action coûte 100 livres à Londres et 143 dollars à New-York et que le taux de change entre la livre et le dollar est de

1,435, il est possible de réaliser une opération d'arbitrage en achetant des actions en dollars à New-York, en les revendant à Londres et en convertissant le produit de la vente, soldée en livres, en dollars.

Sur un plan économique, l'arbitrage est mal perçu. L'arbitrage va en effet à l'encontre de la valorisation du risque et se fonde, pour cela, sur les imperfections du marché. Dans la plupart des raisonnements que nous ferons dans la suite, nous supposerons que le marché ne permet pas de telles opérations.

2.2. Flux généré par un contrat. Pour les deux types de contrat discutés dans la section précédente, il peut être intéressant de discuter du flux ou du profit engendré à échéance.

Dans le cas d'un contrat forward, le flux généré à échéance tient compte du prix d'exercice, noté K, et du prix comptant (ou prix 'spot') de l'actif à l'échéance, noté S_T. Le profit pour l'investisseur est $S_T - K$ dans le cas d'une position longue et $K - S_T$ dans le cas d'une position courte.

Dans le cas d'une option, le flux généré à échéance tient également compte du prix exercice K et du prix comptant S_T à échéance. Dans le cas d'un call, le profit est $(S_T - K)_+$, où $x_+ = \max(0, x)$. Dans le cas d'un put, le profit est $(K - S_T)_+$. On remarque, qu'à la différence des contrats forward, le profit est nécessairement positif. Ceci va à l'encontre de la contrainte d'absence d'arbitrage discutée précédemment et signifie que la souscription d'une option a un prix. Ce prix s'apparente à une prime d'assurance versée pour se couvrir face au risque du marche. Une partie du cours vise justement à définir le juste prix d'une option.

2.3. Dénouement et valorisation d'un contrat forward. Un contrat forward peut être 'dénoué' à tout moment antérieur à l'échéance. Il s'agit pour cela de prendre une position opposée à celle détenue. Par exemple, si un investisseur détient une position longue sur un actif donné à échéant T, il peut prendre une position courte sur le même actif à échéance T à n'importe quel instant t entre 0 et T. En désignant par $F_{0,T}$ et $F_{t,T}$ les prix forward de maturité T aux instants 0 et t, le flux engendré à maturité est le suivant : $S_T - F_{0,T}$ pour la position longue et $F_{t,T} - S_T$ pour la position courte, soit $F_{t,T} - F_{0,T}$. Remarquons que, en prenant $t = T$, $F_{T,T} = S_T$; le cas échéant, le flux final est celui d'une position longue. De même, le flux engendré par le dénouement à date t d'une position courte est $F_{0,T} - F_{t,T}$.

En pratique, se pose la question du juste prix $F_{0,T}$. Le prix forward est une anticipation du prix de l'actif à l'échéance T. Pour le comparer de façon juste au prix comptant à l'instant 0 de l'actif, il est nécessaire de tenir compte de la dépréciation de la monnaie. Le pouvoir d'achat d'un euro à l'instant 0 n'est pas le même que celui, à échéance T, du même euro, conservé dans un coffre jusqu'à échéance T. La dépréciation est calculée au regard du profit généré par le prêt du même euro à un acteur financier de confiance. Le cas échéant, le flux à échéance T s'écrit $\exp(rT) - 1$, où r est la taux d'intérêt sans risque (par exemple le taux LIBOR de prêt entre banques).

Dans ce contexte, le juste prix $F_{0,T}$ s'écrit comme la valeur du capital généré par un placement sans risque à échéance T de montant initial S_0, où S_0 est le prix comptant à l'instant 0 de l'actif sur lequel porte le contrat. On obtient la formule

$$F_{0,T} = S_0 \exp(rT).$$

On est maintenant en mesure de définir la valeur f d'un contrat d'achat forward à l'instant t, pour t entre 0 et T. Le flux généré à échéance est $S_T - F_{0,T}$. A l'instant t, le prix forward est $F_{t,T}$, de sorte que le dénouement de la position à l'instant t est appelé à engendrer le flux $F_{t,T} - F_{0,T}$ à échéance. Cette somme peut être comprise comme celle obtenue en faisant fructifier un capital f entre les instants t et T par un placement sans risque. On a

$$f = \big(F_{t,T} - F_{0,T}\big) \exp(-r(T-t)).$$

3. Exercices

Exercice 1. Donner le flux à échéance T de la combinaison d'un call de prix d'exercice K et de prix C et d'une position courte forward de prix d'exercice K.

Exercice 2. Dans cet exercice, on désigne le taux d'interêt sans risque par r. Pour un actif de prix au comptant initial S_0 et de prix forward à échéance T $F_{0,T}$, décrire un arbitrage dans chacune des deux situations suivantes : $F_{0,T} > S_0 \exp(rT)$ et $F_{0,T} < S_0 \exp(rT)$.

Exercice 3. (Prix forward sur un actif avec paiement de dividendes.) La détention d'un actif à l'instant 0 rapporte à échéance un dividende I.

En désignant par r le taux d'intérêt sans risque, montrer que le juste prix forward à échéance T est

$$F_{0,T} = \big(S_0 \exp(rT) - I\big).$$

On pourra faire le raisonnement suivant : si $F_{0,T} > (S_0 \exp(rT) - I)$, un investisseur peut emprunter S_0 pour acheter l'actif et s'engage à le vendre au prix $F_{0,T}$ à l'instant T. Il touche alors $F_{0,T} - S_0 \exp(rT) + I$.

Exercice 4. (Prix forward sur un actif avec coût de stockage.) La détention d'un actif à l'instant 0 implique de pouvoir le stocker (tel est par exemple le cas de l'or). Sur une période T, le prix à payer à l'instant initial est U.

En désignant par r le taux d'intérêt sans risque, montrer que le juste prix forward à échéance T est

$$F_{0,T} = \big(S_0 + U\big) \exp(rT).$$

CHAPITRE 2

Modèle probabiliste d'actif risqué à une période

Dans ce chapitre, on modélise l'incertitude sur le marché financier par l'introduction d'un aléa. Deux types d'actif seront de fait considérés : un actif sans risque, apparenté à un dépôt sur compte rémunéré ou à un emprunt, et un actif risqué.

1. Modélisation du marché

Le marché que l'on modélise est supposé ne compter qu'une seule période : l'achat et la vente des actifs se sont uniquement à l'instant initial 0. Les flux générés sont étudiés à la maturité T. Entre les deux, aucune transaction n'est possible.

1.1. Actif sans risque. L'actif sans risque est assimilé à un dépôt sur un compte rémunéré (tel que la caisse d'épargne) ou à un emprunt, à un taux d'inérêt r. Pour un capital initial S_0^0 (l'exposant 0 décrisant l'absence de risque), la valeur à maturité T est $S_0^0(1+r)$.

1.2. Actif risqué. L'actif risqué peut être une action, une monnaie ou une matière première. Le prix comptant initial d'une unité est noté S_0. Le prix comptant à l'instant T est noté S_T. Pour refléter l'incertitude sur le marche, on écrit

$$S_T = S_0 \xi,$$

où ξ est une variable aléatoire positive construite sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Une situation simple consiste à choisir ξ à valeurs dans un ensemble à deux éléments $\{d, u\}$, avec $0 < d < u$. Ici, d vaut pour 'down' et modélise une situation à la baisse alors que u vaut pour 'up' et modélise une situation à la hausse. Dans ce cas, il est possible de décrire l'évolution du marché avec un arbre à deux branches. Les probabilités de voir l'une ou l'autre des deux branches s'écrivent alors

$$\mathbb{P}\big(\xi = u\big) = p = 1 - \mathbb{P}\big(\xi = d\big).$$

1.3. Portefeuille. Un portefeuille consiste en une répartition d'un capital (ou d'une richesse) entre l'actif sans risque et l'actif risqué. Dans le cas du modèle à une période, il peut être modélisé à l'aide d'un couple (Φ_0^0, Φ_0). Φ_0^0 désigne la part détenu dans le capital sans risque et Φ^0 la part détenu dans le capital risqué. La richesse initial associée s'écrit à l'instant 0 :

$$W_0 = \Phi_0^0 S_0^0 + \Phi_0 S_0.$$

On pourra prendre S_0^0 dans un souci de simplification.

Avec le modèle défini précédemment, il est possible de calculer la richesse à l'instant T, lorsque l'investisseur n'a pas consommé entre les périodes 0 et T. On écrit alors

$$W_T = \Phi_0^0 S_T^0 + \Phi_0 S_T. \tag{1.1}$$

Si jamais l'investisseur a consommé entre les instants 0 et T, la richesse est donnée par

$$W_T = \Phi_0^0 S_T^0 + \Phi_0 S_T - C,$$

où C est la richesse consommée entre 0 et T.

2. Univers risque-neutre

2.1. Richesse moyenne. Reprenons l'expression de la richesse dans (1.1). Il est possible de calculer la richesse moyenne de l'agent dont le portefeuille est (Φ_0^0, Φ_0). Nous calculons en effet

$$\mathbb{E}(W_T) = \Phi_0^0(1+r)S_0^0 + \Phi_0 \mathbb{E}(S_T).$$

Nous remarquons alors le phénomène suivant. Si jamais $\mathbb{E}(\xi) = 1 + r$, alors

$$\mathbb{E}(W_T) = \Phi_0^0(1+r)S_0^0 + \Phi_0(1+r)S_0 = \exp(rT)W_0.$$

PROPOSITION 2.1. *Supposons que ξ soit une variable aléatoire intégrable et que $\mathbb{E}(\xi) = 1 + r$, alors, quelle que soit la stratégie initiale,*

$$\mathbb{E}(W_T) = (1+r)W_0.$$

La proposition signifie que, sous la condition $\mathbb{E}(\xi) = 1 + r$, la richesse moyenne est toujours la même que celle obtenue en investissant dans l'actif sans risque uniquement. Cette situation est un peu désespérante pour un investisseur, qui préfèrera toujours investir dans l'actif sans risque si le gain espéré est le même (voir exercices). La condition d'égalité de la moyenne avec le rendement sans risque est de fait peu crédible en pratique. Elle va néanmoins nous mener vers une situation idéale pour la valorisation des produits dérivés.

2.2. Probabilité risque-neutre. La situation décrite dans la Proposition 2.1 est appelée risque-neutre : la prise de risque ne rapporte rien, en moyenne.

Si la condition $\mathbb{E}(\xi) = \exp(rT)$ est peu crédible en pratique, rien n'empêche en revanche de changer la probabilité avec laquelle sont mesurés les événements pour définir une situation, idéale sur le plan mathématique, mais non-réalisté, où la prise de risque est de bénéfice moyen nulle. Supposons en effet que nous puissions trouver une probabilité, notée $\mathbb{P}^*$, sous laquelle $\mathbb{E}^*(\xi) = 1 + r$. Alors, la Proposition 2.1 reste vraie, mais sous la probabilité $\mathbb{P}^*$.

DEFINITION 2.2. *Une probabilité $\mathbb{P}^*$ est appelée candidate au risque-neutre si, sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}^*)$, $\mathbb{E}^*(\xi) = 1 + r$.*

2.3. Cas Bernoulli. Reprenons le cas où ξ est à valeurs dans $\{d, u\}$. Le cas échéant, il est possible de voir l'ensemble Ω comme $\{d, u\}$ lui-même et de le munir de $\mathcal{A}$, égal à la collection des parties. La variable ξ est alors construite de façon 'canonique' comme

$$\xi : \omega \in \{d, u\} \mapsto \omega.$$

Définir la probabilité $\mathbb{P}$, c'est simplement calculer les poids de d et de u. On note p^* le poids de u et, de fait, $1 - p^*$ le poids de d. La condition $\mathbb{E}^*(\xi) = 1 + r$ impose alors

$$p^* u + (1 - p^*)d = 1 + r,$$

soit encore

$$p^* = \frac{1 + r - d}{u - d}.$$

On comprend les choses suivantes : si $1 + r < d$, alors $p^* < 0$. Il n'est pas possible de construire de probabilité candidate au risque neutre. Si $1 + r > u$ alors $p^* > 1$. Il n'est pas non plus possible de construire de probabilité risque neutre.

2.4. Arbitrage. Au regard de la discussion menée au chapitre 1, il est possible de définir la notion d'arbitrage de façon rigoureuse.

DEFINITION 2.3. *On dit qu'une stratégie (Φ_0^0, Φ_0) est un arbitrage si, étant donnée une richesse initiale nulle, la richesse W_T vérifie :*

(1) $\mathbb{P}(W_T \geq 0) = 1$ *(impossibilité de perdre de l'argent),*
(2) $\mathbb{P}(W_T > 0) > 0$ *(possibilité de faire du bénéfice).*

On prendra bien garde de noter que la notion d'arbitrage est ici donnée sous la probabilité $\mathbb{P}$ et non sous une probabilité candidate au risque neutre. Pour différencier, on dit que $\mathbb{P}$ est la probabilité historique. Mais, en réalité, on aimerait ramener l'étude sous une probabilité candidate au risque neutre. Pour cela, il faut que les événements de mesure nulle sous $\mathbb{P}$ soit aussi de mesure nulle sous la probabilité candidate au risque neutre.

DEFINITION 2.4. *Une probabilité $\mathbb{P}^*$, candidate au risque-neutre, est dite 'risque-neutre' si, pour tout événement $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}^*(A) = 0$. Les probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}^*$ sont dites équivalentes.*

Dans le cas Bernoulli, la condition d'équivalence s'écrit $p^* \in]0, 1[$. Cela signifie que la probabilité $\mathbb{P}^*$ est équivalente à $\mathbb{P}$ si et seulement si $d < 1 + r < u$.

Voici le lien avec les arbitrages :

PROPOSITION 2.5. *S'il existe une probabilité risque neutre, il ne peut pas y avoir d'arbitrage. On dit qu'il y a AOA : absence d'opportunité d'arbitrage.*

Preuve. Il suffit de remarquer que, sous les conditions de définition d'un arbitrage, $\mathbb{E}^*(W_T) = 0$. De fait, $\mathbb{P}(W_T \geq 0) = 1$ implique $\mathbb{P}^*(W_T \geq 0) = 1$ et donc $\mathbb{P}^*(W_T = 0) = 1$ puis $\mathbb{P}(W_T = 0) = 1$. □

3. Juste prix et réplication d'une option

3.1. Principe du juste prix d'une option. Le but est ici de donner une formule mathématique pour le juste prix d'une option (européenne). La question se pose de savoir ce que l'on entend par juste prix :

DEFINITION 3.1. *On dit que C est un prix admissible d'une option d'achat de maturité T et de prix d'exercice K s'il existe une strateégie (Φ_0^0, Φ_0) telle que la richesse associée vérifie*

$$W_0 = C,$$

c-à-d la richesse initiale est exactement C, et

$$W_T = (S_T - K)_+,$$

c-à-d la richesse générée à échéance coincide exactement avec le flux de l'option.

Une définition équivalente peut être donnée pour un prix admissible P d'une option de vente de maturité T et de prix d'exercice K.

Cette définition se comprend intuitivement de la façon suivante : on cherche à définir le prix de l'option comme la juste somme à investir à l'instant 0 pour se couvrir face au risque à l'instant terminal. En pratique, le prix C (ou P) est le prix payé par l'acheteur de l'option au vendeur de l'option : le vendeur, qui joue le rôle d'un assureur, s'engage à débourser $(S_T - K)_+$ à échéance, pour honorer le contrat. La question qui se pose pour lui est donc de générer une telle quantité à échéance.

3.2. Juste prix et arbitrage.

PROPOSITION 3.2. *Supposons que C soit un prix admissible d'une option d'achat de maturité T et de prix d'exercice à K. Alors, tout autre prix pour l'option d'achat conduit à la possibilité d'un arbitrage. Un résultat équivalent vaut pour un prix admissible P d'une option de vente.*

Le fait que tout autre prix qu'un prix admissible conduise à un arbitrage montre, qu'étant donné un prix admissible, ce prix est le juste prix de l'option.

Preuve. Supposons que C soit un prix admissible mais que le prix proposé sur le marche soit C'. Si $C < C'$, alors le vendeur de l'option vend au prix C'. Il utilise C pour générer $(S_T - K)_+$ à échéance. Il garde de fait $C' - C > 0$. Si $C > C'$, alors l'acheteur emprunte Φ_0^0 à la banque et Φ_0 en actif risqué. Par définition de C, cet emprunt s'élève à C euros. Par ailleurs, la dette à l'instant T s'élève à $(S_T - K)_+$. L'achat de l'option permet à l'acheteur d'envisager sereinement le remboursement de la dette. En supplément, il garde la différence $C - C' > 0$. □

3.3. Juste prix et probabilité risque-neutre.

PROPOSITION 3.3. *Supposons qu'il existe une probabilité risque-neutre et que C soit le juste prix d'une option d'achat. Supposons par ailleurs qu'il existe une probabilité risque-neutre $\mathbb{P}^*$. Alors, nécessairement,*

$$C = (1+r)^{-1}\mathbb{E}^*\big[\big(S_T - K\big)_+\big].$$

De même, si P est le juste prix d'une option de vente et s'il existe une probabilité risque-neutre, alors, nécessairement,

$$P = (1+r)^{-1}\mathbb{E}^*\big[\big(K - S_T\big)_+\big].$$

En particulier, s'il existe une probabilité risque-neutre $\mathbb{P}^*$ et si C et P sont les justes prix du call et du put, alors

$$C - P = S_0 - (1+r)^{-1}K.$$

Cette relation porte le nom de relation de parité : calculer le call revient à calculer le put.

Preuve. On désigne par (Φ_0^0, Φ_0) la stratégie associée au prix C. On sait que la richesse associée à l'instant T est $W_T = (S_T - K)_+$. Par proprtiété de la probabilité risque-neutre, il vient

$$C = W_0 = (1+r)^{-1}\mathbb{E}^*[W_T] = (1+r)^{-1}\mathbb{E}^*\big[\big(S_T - K\big)_+\big],$$

ce qui conclut la preuve.

La démonstration de la relation de parité est immédiate. □

3.4. Réplication. Il faut comprendre que les formules données par la Proposition 3.3 n'ont d'intérêt que s'il existe véritablement une stratégie (Φ_0^0, Φ_0) permettant de générér le flux $(S_T - K)_+$. Une telle stratégie porte le nom de stratégie de réplication. Rien n'assure a priori l'existence d'une telle stratégie :

DEFINITION 3.4. *On dit qu'un marché sans opportunité d'arbitrage est complet si, pour tout prix d'exercice K, il existe une stratégie de réplication pour le call et le put.*

Cette définition implique que, pour toute maturité $T > 0$ et tout prix d'exercice K, il existe un juste prix de l'option de vente et un juste prix de l'option d'achat. La Proposition 3.3 suggère qu'un marché complet est un marché pour lequel il existe une unique probabilité risque-neutre. S'il en existait deux, il pourrait y avoir contradiction dans la formation des prix. Un exemple pour lequel nous savons qu'il existe une unique probabilité risque-neutre est le modèle binomial. Le résultat suivant est fondamental :

PROPOSITION 3.5. *Considérons le modèle binomial avec $d < 1+r < u$. Alors, étant donné un prix d'exercice K, il existe une unique stratégie de réplication de l'option d'achat donnée par :*

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{(S_0u - K)_+ - (S_0d - K)_+}{S_0(u-d)}, \\ \Phi_0^0 &= \frac{-d(S_0u - K)_+ + u(S_0d - K)_+}{S_0^0(1+r)(u-d)}. \end{aligned}$$

Le cas échéant, le juste prix s'écrit

$$C = \frac{1}{1+r}\Big[\frac{1+r-d}{u-d}(S_0u - K)_+ + \frac{u-1+r}{u-d}(S_0d - K)_+\Big].$$

Une formule analogue existe pour P en remplaçant le flux $(\cdot - K)_+$ par le flux $(K - \cdot)_+$.

Preuve. On sait qu'une condition nécessaire pour que C soit le juste prix est

$$C = (1+r)^{-1}\mathbb{E}^*\big[(S_T - K)_+\big].$$

Ceci conduit de fait à poser

$$C = \frac{1}{1+r}\Big[\frac{1+r-d}{u-d}(S_0u - K)_+ + \frac{u-1+r}{u-d}(S_0d - K)_+\Big].$$

Il s'agit maintenant de trouver une stratégie (Φ_0^0, Φ_0) telle que

$$C = \Phi_0^0 S_0^0 + \Phi_0 S_0,$$

et

$$\Phi_0^0 S_0^0(1+r) + \Phi_0 S_0 u = (S_0 u - K)_+,$$
$$\Phi_0^0 S_0^0(1+r) + \Phi_0 S_0 d = (S_0 d - K)_+.$$

Le système ci-dessus revient à poser

$$\Phi_0 = \frac{(S_0 u - K)_+ - (S_0 d - K)_+}{S_0(u-d)}$$

et

$$\Phi_0^0 = \frac{-d(S_0 u - K)_+ + u(S_0 d - K)_+}{S_0^0(1+r)(u-d)}.$$

□

3.5. Couverture δ-neutre. Dans le modèle binomial, la part de la richesse investie par l'agent dans l'actif risqué pour couvrir le call s'écrit :

$$\Phi_0 = \frac{(S_0 u - K)_+ - (S_0 d - K)_+}{S_0 u - S_0 d}.$$

En notant f la fonction de flux :

$$f(S) = (S - K)_+$$

on en déduit que

$$\Phi_0 = \frac{f(S_0 u) - f(S_0 d)}{S_0 u - S_0 d}.$$

Cette quantité s'apparente au taux d'accroissement du flux terminal ou encore à une dérivée discrète par rapport au prix comptant de l'action. Elle porte le nom de δ.

4. Exercices

Exercice 1. On reprend le modèle à une période avec $S_T = S_0\xi$. On suppose que $\mathbb{V}(\xi) > 0$. Pour une stratégie (Φ_0^0, Φ_0), montrer que la variance de la richesse à l'instant T est nulle si et seulement si $\Phi_0 = 0$. En déduire que, si $\mathbb{E}(\xi) = \exp(rT)$, alors il est préférable d'investir dans l'actif sans risque uniquement.

Exercice 2. On reprend le modèle à une période avec $S_T = S_0\xi$. On suppose que ξ peut prendre trois valeurs $\{d, (d+u)/2, u\}$, avec $d < u$. Etudier la construction d'une probabilité risque neutre.

Exercice 3. On reprend le modèle Bernoulli avec $0 < p < 1$. Montrer qu'il y a possibilité d'arbitrage si $1 + r \leq d$ ou $u \leq 1 + r$.

Exercice 4. On reprend le modèle Bernoulli avec $0 < p < 1$. On suppose que l'action verse des dividendes. Le capital détenu à l'instant T est de la forme $S_0(\xi + q)$, où q exprime le dividende. Etudier l'existence d'une probabilité risque-neutre.

Exercice 5. On reprend le modèle Bernoulli avec $0 < p < 1$. On suppose qu'il y a un coût de stockage U sur la période. Le capital détenu à l'instant T est de la forme $S_0(\xi - U)$. On suppose $d < 1 + r + U < u$. Donner le juste prix d'un call. Etudier la relation de parité.

Exercice 6. On reprend le modèle Bernoulli avec $0 < p < 1$. On suppose que l'action verse des dividendes. Le capital détenu à l'instant T est de la forme $S_0(\xi + q)$, où q exprime le dividende. On suppose $d < 1 + r - q < u$. Etudier la couverture δ-neutre.

Exercice 7. On reprend le modèle à une période avec $S_T = S_0\xi$. On suppose que ξ peut prendre trois valeurs $\{d, (d + u)/2, u\}$, avec $d < 1 + r < u$. Le marché est-il complet ?

Exercice 8. Dans le cadre du modèle à N périodes, on suppose qu'il existe une strateégie $(\phi^0_k, \phi_k)_{0\leq k\leq N-1}$ telle que $W_0 \geq 0$, $\mathbb{P}(W_{NT} \geq W_0(1 + r)^N) = 1$ et $\mathbb{P}(W_{NT} > W_0(1 + r)^N) > 0$. Montrer qu'il y a possibilité d'arbitrage.

CHAPITRE 3

Modèle probabiliste à plusieurs périodes

Nous poursuivons l'étude initiée dans le chapitre précédent, en supposant dorénavant que les actifs peuvent être échangés sur plusieurs périodes.

1. Modélisation du marché

Les périodes sont de la forme : $[0,T]$, $[T,2T]$, $\ldots$, $[(N-1)T,NT]$, pour un entier $N \geq 1$. La modélisation reprend alors les lignes définies dans le paragraphe précédent.

1.1. Actif sans risque. L'actif sans risque est toujours assimilé à un dépôt sur un compte rémunéré ou à un emprunt, à un taux d'inérêt r. Pour un capital initial S_0^0, la valeur à nT, pour $n \in \{0,\ldots,N\}$, s'écrit

$$S_{nT}^0 = S_0^0(1+r)^n.$$

1.2. Actif risqué. Le prix comptant de l'actif risqué à l'instant nT est noté S_{nT}. Pour refléter l'incertitude sur le marche, on écrit maintenant, pour $n \in \{1,\ldots,N\}$,

$$S_{nT} = S_0 \times \xi_1 \times \cdots \times \xi_n,$$

où $\xi_1,\ldots,\xi_N$ sont N variables aléatoires indépendantes construites sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. Dans la suite, nous les supposerons le plus souvent de même loi.

Nous appellerons cas binomial le cas où ξ_n est à valeurs dans $\{d,u\}$, pour chaque $n \in \{1,\ldots,N\}$, avec

$$\mathbb{P}\big(\xi_n = u\big) = p = 1 - \mathbb{P}\big(\xi_n = d\big),$$

p étant indépendant de n.

1.3. Observation des prix jusqu'à l'instant n. L'information détenue par un agent financier à un instant $n \in \{0,\ldots,N\}$ est modélisée par la tribu $\mathcal{F}_n = \{\emptyset,\Omega\}$ si $n=0$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ si $n \geq 1$. On remarque que la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\in\{0,\ldots,N\}}$ forme une filtration.

Il est facile de voir que le prix comptant $(S_{nT})_{n\in\{0,\ldots,N\}}$ est adapté à cette filtration au sens où S_{nT} est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout $n \in$

$\{0, \dots, N\}$. Par ailleurs, nous utiliserons souvent le fait que $(\xi_{n+1}, \dots, \xi_N)$ est indépendant de $\mathcal{F}_n$, pour $n \in \{0, \dots, N-1\}$.

1.4. Portefeuille. La notion de portefeuille ou de stratégie doit tenir compte de la possibilité, pour l'agent financier, de rééquilibrer son portefeuille à chaque fin de période. A l'instant 0, la répartition du portefeuille est décrite par un couple (Φ_0^0, Φ_0) sur le même principe que pour le modèle à une période. En particulier, le couple (Φ_0^0, Φ_0) est déterministe. La richesse associée aux instants 0 et T s'écrit de fait (en l'absence de consommation) :

$$\begin{aligned} W_0 &= \Phi_0^0 S_0^0 + \Phi_0 S_0, \\ W_T &= \Phi_0^0 S_T^0 + \Phi_0 S_T. \end{aligned}$$

A l'instant T, l'agent peut décider d'une nouvelle répartition du capital, qui se fait sur l'observation des prix jusqu'à l'instant T ou, de façon équivalente, à l'aide de l'information contenue dans $\mathcal{F}_T$. Il choisit donc deux variables aléatoires (Φ_T^0, Φ_T) telles que

$$W_T = \Phi_T^0 S_T^0 + \Phi_T S_T.$$

Il s'agit là d'une nouvelle répartition de son capital. La condition d'égalité :

$$\Phi_0^0 S_T^0 + \Phi_0 S_T = \Phi_T^0 S_T^0 + \Phi S_T,$$

traduit l'absence de consommation ou encore l'absence d'apport extérieur. On dit que la stratégie, à l'instant T, est déterminée de façon *auto-financée.*

Ce principe est étendu aux instants $2T$, $3T$, ..., $(N-1)T$.

Definition 1.1. *On appelle stratégie auto-financée toute suite de variables aléatoires* $(\Phi_{nT}^0, \Phi_{nT})_{n \in \{0,\dots,N-1\}}$, *adaptée à la filtration du marché* $(\mathcal{F}_n)_{n \in \{0,\dots,N-1\}}$, *et définissant une suite* $(W_{nT})_{n \in \{0,\dots,N\}}$ *de richesses associées :*

$$\begin{aligned} W_0 &= \Phi_0^0 S_0^0 + \Phi_0 S_0, \\ W_{nT} &= \Phi_{(n-1)T}^0 S_{nT}^0 + \Phi_{(n-1)T} S_{nT} \\ &= \Phi_{nT}^0 S_{nT}^0 + \Phi_{nT} S_{nT}, \quad n \in \{1, \dots, N-1\}, \\ W_{NT} &= \Phi_{(N-1)T}^0 S_{(N-1)T}^0 + \Phi_{(N-1)T} S_{(N-1)T}. \end{aligned}$$

Il faut insister sur le fait que l'auto-financement décrit une situation d'équilibre financier permettant d'exprimer la richesse de deux façons. Dans ce contexte, il est remarquable que la richesse aux instants T, $2T$, ..., NT, puisse être exprimée à l'aide de variables aléatoires ne dépendant que des observations jusqu'aux instants 0, T, ..., $(N-1)T$. On dit que le processus $(\Phi_{(n-1)T})_{n \in \{1,\dots,N\}}$ est prévisible par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\{1,\dots,N\}}$: cela signifie que, pour tout $n \in \{1,\dots,N\}$, $\Phi_{(n-1)T}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{n-1}$.

2. Propriété martingale en univers risque-neutre

Afin de conduire l'analyse du modèle, nous allons chercher à nous ramener à l'étude du modèle à une période. L'idée est de fait de travailler de période en période. Etant donnée une période typique, de la forme $[(n-1)T, nT]$, pour un entier $n \in \{1,\dots,N\}$, le couple $(\Phi^0_{(n-1)T}, \Phi_{(n-1)T})$ joue le rôle de (Φ^0_0, Φ_0) dans le modèle à une période. A l'instant $(n-1)T$, l'information disponible est $\mathcal{F}_{(n-1)T}$, de sorte que l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_{(n-1)T}$ joue, à l'instant $(n-1)T$, le même rôle que l'espérance à l'instant 0 dans le cadre du modèle à une période.

2.1. Richesse conditionnelle. Pour un entier $n \in \{1,\dots,N\}$, nous cherchons à calculer $\mathbb{E}[W_{nT}|\mathcal{F}_{n-1}]$. Ceci suppose que $\mathbb{E}[|W_{nT}|] < +\infty$. Pour cela, nous imposons :

$$\forall n \in \{1,\dots,N\}, \quad \mathbb{E}\big[|\phi_{nT}|^2\big],\ \mathbb{E}\big[|\xi_n|^2\big] < +\infty. \tag{2.2}$$

Il est assez facile de vérifier que (2.2) implique effectivement $\mathbb{E}[|W_{nT}|] < +\infty$, pour tout $n \in \{1,\dots,N\}$. Si jamais Ω est de cardinal fini, cette hypothèse est naturellement vérifiée.

Nous pouvons maintenant calculer :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[W_{nT}|\mathcal{F}_{n-1}\big] &= \mathbb{E}\big[\Phi^0_{(n-1)T}S^0_{nT} + \Phi_{(n-1)T}S_{nT}|\mathcal{F}_{n-1}\big]\\ &= \Phi^0_{(n-1)T}S^0_{nT} + \Phi_{(n-1)T}S_{(n-1)T}\mathbb{E}\big[\xi_n|\mathcal{F}_{n-1}\big].\end{aligned}$$

Par indépendance de ξ_n et de $\mathcal{F}_{n-1}$, l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[\xi_n|\mathcal{F}_{n-1}]$ est égale à $\mathbb{E}[\xi_n]$.

PROPOSITION 2.1. *Sous* (2.2)*, supposons que* $\mathbb{E}[\xi_n] = 1 + r$*, pour un* n *donné entre* 1 *et* N*, alors,*

$$\mathbb{E}\big[W_{nT}|\mathcal{F}_{n-1}\big] = (1+r)W_{(n-1)T}.$$

Ce résultat est très important. Il peut être réénoncé à l'aide de la théorie des martingales :

PROPOSITION 2.2. *Supposons que* (2.2) *soit vérifiée pour une stratŐ-gie auto-financée* $(\Phi^0_{nT}, \Phi_{nT})_{n\in\{0,\dots,N-1\}}$*. Supposons par ailleurs que*

$$\forall n \in \{1,\dots,N\}, \quad \mathbb{E}[\xi_n] = 1 + r.$$

Alors, la suite

$$\big((1+r)^{-n}W_{nT}\big)_{n\in\{0,\dots,N\}}$$

est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\{0,\dots,N\}}$.

2.2. Probabilité(s) risque-neutre. Exactement comme dans le chapitre précédent, il n'est pas réaliste d'espérer modéliser la dynamique du marché à l'aide d'une probabilité historique $\mathbb{P}$ vérifiant

$$\forall n \in \{1, \dots, N\}, \quad \mathbb{E}[\xi_n] = 1 + r.$$

En revanche, il est raisonnable d'espérer trouver d'autres mesures de probabilités, équivalentes à la probabilité historique, sous laquelle cette propriété est vérifiée :

DEFINITION 2.3. *Une probabilité* $\mathbb{P}^*$ *sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *est dite risque-neutre si :*

(1) *Elle est équivalente à* $\mathbb{P}$*,*
(2) *Sous* $\mathbb{P}^*$*, les variables* $\xi_1, \dots, \xi_N$ *sont indépendantes,*
(3) *Pour tout* $n \in \{1, \dots, N\}$*,* $\mathbb{E}^*[\xi_n] = 1 + r$*, où* $\mathbb{E}^*$ *désigne l'espérance sous* $\mathbb{P}^*$*.*

Il est possible de relier l'existence d'une probabilité risque-neutre à l'absence d'opportunité d'arbitrage sur le modèle du chapitre précédent. Ceci suppose néanmoins d'adapter la définition d'un arbitrage :

DEFINITION 2.4. *On dit qu'une stratégie* $(\Phi_n^0, \Phi_n)_{n \in \{1,\dots,N\}}$ *est un arbitrage si, étant donnée une richesse initiale nulle,*

(1) $\mathbb{P}(W_{NT} \geq 0) = 1$,
(2) $\mathbb{P}(W_{NT} > 0) > 0$.

Avec cette définition, il est facile de prouver que

PROPOSITION 2.5. *S'il existe une probabilité risque-neutre* $\mathbb{P}^*$ *sous laquelle la condition* (2.2) *est réalisée, alors il y a absence d'opportunité d'arbitrage.*

Preuve. La preuve est une simple adaptation de celle du chapitre précédent. □

2.3. Cas binomial. Dans le cas binomial, il est possible de démontrer qu'il existe une et une seule probabilité risque-neutre si et seulement si $d < 1 + r < u$.

Comme dans le chapitre précédent, l'idée est de choisir pour Ω l'ensemble le plus simple possible. Afin de décrire les valeurs des N évolutions successives du cours de l'actif risqué, le choix 'canonique' est :

$$\Omega = \{d, u\}^N,$$

que l'on munit de la tribu des parties.

Les variables $\xi_1, \ldots, \xi_N$ sont données par les applications coordonnées :

$$\xi_n : (\omega_1, \ldots, \omega_N) \in \{d, u\}^N \mapsto \omega_n.$$

Etant une probabilité $\mathbb{P}^*$ sur Ω, chaque ξ_n suit une loi de Bernoulli sur $\{d, u\}$ de paramètres :

$$p_n^* = \mathbb{P}^*\{\xi_n = u\}, \quad 1 - p_n^* = \mathbb{P}^*\{\xi_n = d\}.$$

Demander à ce que $\mathbb{E}^*(\xi_n) = 1 + r$, c'est demander (comme dans le chapitre précédent) :

$$p_n^* = \frac{1 + r - d}{u - d},$$

de sorte que tous les p_n^* sont égaux, leur valeur commune étant notée $p^* = (1 + r - d)/(u - d)$. Ceci n'est possible que si $d \leq 1 + r \leq u$.

Pour construire une probabilité risque-neutre, il reste à traduire la signification de la condition (2) dans la définition d'une probabilité risque-neutre. Dire que les variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$, de loi de Bernoulli de paramètre p^* sur $\{d, u\}$ (comme ci-dessus), sont indépendantes sous $\mathbb{P}^*$, c'est dire que :

$$\mathbb{P}^*\big\{\xi_1 = \omega_1, \ldots, \xi_N = \omega_N\big\} = (p^*)^{\sharp(n:\omega_n = u)}(1 - p^*)^{\sharp(n:\omega_n = d)}.$$

On en déduit qu'il existe une unique probabilité $\mathbb{P}^*$ sous laquelle les variables $\xi_1, \ldots, \xi_N$ sont indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre p^*. Elle est donnée par :

$$\mathbb{P}^*\big\{\big(\omega_1, \ldots, \omega_N\big)\big\} = (p^*)^{\sharp(n:\omega_n = u)}(1 - p^*)^{\sharp(n:\omega_n = d)}.$$

L'équivalence avec $\mathbb{P}$ est assurée si et seulement si l'ensemble vide est le seul événement de mesure nulle sous $\mathbb{P}^*$, ce qui revient à imposer la condition $d < 1 + r < u$.

3. Options européennes

Nous discutons maintenant de l'évaluation des options européennes dans le cadre du modèle à N périodes.

3.1. Juste prix d'une option européenne. Sur le modèle du chapitre précédent, nous posons :

Definition 3.1. *On dit que C est le juste prix d'une option d'achat de maturité NT et de prix d'exercice K s'il existe une stratégie autofinancée $(\Phi_n^0, \Phi_n)_{n \in \{0, \ldots, N-1\}}$ telle que la richesse associée vérifie*

$$W_0 = C, \quad W_{NT} = (S_{NT} - K)_+.$$

Une définition équivalente peut être donnée pour le juste prix P d'une option de vente de maturité NT et de prix d'exercice K.

Il est possible de vérifier, toujours sur le modèle du chapitre précédent, que toute autre prix que le juste prix conduit à un arbitrage.

De façon analogue à la Proposition 3.3 du chapitre précédent, le juste prix, quand il existe, peut être exprimé sous la forme d'une espérance, calculée sous une probabilité risque-neutre :

PROPOSITION 3.2. *Supposons qu'il existe une probabilité risque-neutre et que C soit le juste prix d'une option d'achat de maturité NT. Supposons par ailleurs qu'il existe une probabilité risque-neutre $\mathbb{P}^*$ sous laquelle la condition* (2.2) *est réalisée. Alors, nécessairement,*

$$C = (1+r)^{-N}\mathbb{E}^*\big[\big(S_{NT} - K\big)_+\big].$$

De même, si P est le juste prix d'une option de vente et s'il existe une probabilité risque-neutre, alors, nécessairement,

$$P = (1+r)^{-N}\mathbb{E}^*\big[\big(K - S_{NT}\big)_+\big].$$

En particulier, s'il existe une probabilité risque-neutre $\mathbb{P}^*$ sous laquelle la condition (2.2) *est réalisée et si C et P sont les justes prix du call et du put, alors C et P sont liés par la relation de parité :*

$$C - P = S_0 - (1+r)^{-N}K.$$

3.2. Exemple de réplication en marché complet. De façon analogue à la situation rencontrée dans le cadre du modèle à une période, les formules théoriques pour C et P données dans le paragraphe précédent n'ont, en réalité, d'intérêt que s'il existe une stratégie permettant de 'générer', ou encore de 'répliquer' pour reprendre la terminologie introduite dans le chapitre précédent, le flux à échéance. Cela suggère d'étendre la notion de marché complet au cas de modèles à plusieurs périodes :

DEFINITION 3.3. *On dit qu'un marché sans opportunité d'arbitrage est complet si, pour tout prix d'exercice K, il existe une stratégie de réplication pour le call et le put de maturité NT.*

A nouveau, la Proposition 3.2 suggère qu'un marché complet est un marché pour lequel il existe une unique probabilité risque-neutre puisque l'existence de deux probabilités risque-neutre pourrait conduire à une contradiction dans la formation des prix. Nous nous ne démontrerons par ce résultat. En revanche, nous soulignons la nécessité de prendre quelques précautions. En effet, la Proposition 3.2 suppose que, sous la probabilité risque-neutre utilisée pour évaluer les options, la condition d'intégrabilité des stratégies soit vérifiée. Dans la définition ci-dessus de la complétude du marché, rien n'indique a priori que la stratégie de réplication vérifie effectivement les conditions nécessaires d'intégrabilité. Une façon de contourner cette difficulté, purement théorique, consiste à supposer que l'univers Ω est fini. Le cas échéant, les stratégies de réplication, si elles existent, vérifient nécessairement les conditions d'intégrabilité, de sorte, qu'en marché complet, l'existence d'une probabilité risque-neutre permet, automatiquement, d'évaluer les options [1].

La contrainte Ω fini suggère de discuter la réplication dans le cadre du modèle binomial.

THEOREM 3.4. *Le modèle binomial à N périodes est complet.*

L'existence et l'unicité de la probabilité risque-neutre ont déjà été discutées dans la section précédente. Le calcul du prix du call (en supposant, pour le moment, l'existence de stratégies de réplication) consiste en le calcul de

$$C = (1+r)^{-N}\mathbb{E}^*\big[\big(S_{NT} - K\big)_+\big].$$

Le calcul de l'espérance peut être mené sur le modèle du calcul d'une espérance impliquant une loi binomiale. En assimilant les hausses à des succès et les baisses à des échecs, il est facile de voir, que pour tout entier $n \in \{0, \dots, N\}$, la probabilité d'observer n hausses et $N-n$ baisses est $C_N^n(p^*)^n(1-p^*)^{N-n}$. De fait,

$$C = (1+r)^{-N}\sum_{n=0}^{N} C_N^n(p^*)^n(1-p^*)^{N-n}\big(S_0u^nd^{N-n} - K\big)_+.$$

Une formule analogue vaut naturellement pour le put. Plus généralement, par propriété martingale, la richesse le long d'une stratégie de réplication doit être donnée par :

$$\begin{aligned} W_{(N-k)T} &= (1+r)^{-k}\mathbb{E}^*\big[\big(S_{(N-k)T}\xi_{k+1}\cdots\xi_N - K\big)_+ | \mathcal{F}_{N-1}\big] \\ &= \varphi_k(S_{NT}), \end{aligned}$$

avec

$$\varphi_n(x) = (1+r)^{-n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k(p^*)^k(1-p^*)^{n-k}\big(xu^kd^{n-k} - K\big)_+.$$

Nous nous focalisons maintenant sur l'existence d'une stratégie de réplication. L'idée fondamentale est la suivante : la stratégie est constru--ite de façon rétrograde en partant de l'échéance NT. Considérons en effet la dernière période. A l'instant $(N-1)T$, le cours de l'actif risqué est $S_{(N-1)T}$. Tout se passe alors pour l'investisseur comme s'il était sur

1. En réalité, l'absence d'opportunité d'arbitrage implique l'existence d'une probabilité risque-neutre de sorte que, dans la définition de la complétude, il serait possible de faire référence, d'une façon ou d'une autre, aux probabilités risque-neutre.

un modèle à une période. Cela suggère de choisir, comme part à investir dans l'actif risqué, la quantité :

$$\Phi_{(N-1)T} = \frac{(S_{(N-1)T}u - K)_+ - (S_{(N-1)T}d - K)_+}{S_{(N-1)T}(u-d)}.$$

Le cas échéant, la valeur de la richesse à l'instant $(N-1)T$ doit être égale à

$$W_{(N-1)T} = \varphi_1(S_{(N-1)T}).$$

On comprend de fait que, sur la période $[(N-2)T, (N-1)T]$, il est possible de recommencer le même raisonnement, mais avec comme nouvelle fonction de flux terminal la fonction φ_1. De fait, sur le modèle précédent, on pose

$$\Phi_{(N-2)T} = \frac{\varphi_1(S_{(N-2)T}u) - \varphi_1(S_{(N-2)T}d)}{S_{(N-2)T}(u-d)}.$$

Par récurrence, on comprend que la bonne stratégie de réplication devrait être

$$\Phi_{(N-k)T} = \frac{\varphi_{k-1}(S_{(N-k)T}u) - \varphi_{k-1}(S_{(N-k)T}d)}{S_{(N-k)T}(u-d)},$$

soit encore

$$\Phi_{kT} = \frac{\varphi_{N-(k+1)}(S_{kT}u) - \varphi_{N-(k+1)}(S_{kT}d)}{S_{kT}(u-d)}. \tag{3.3}$$

Il s'agit maintenant de vérifier si cette stratégie est la bonne. Pour cela nous remarquons que

$$\varphi_{n+1}(x) = (1+r)^{-1}\mathbb{E}^*\big[\varphi_n(x\xi_i)\big], \quad 1 \leq i \leq N.$$

Nous partons du capital initial $W_0 = \varphi_N(S_0)$ que l'on répartit sous la forme

$$W_0 = S_0^0\Phi_0^0 + S_0\Phi_0,$$

le choix de Φ_0 étant donné par (3.3) et

$$\Phi_0^0 = \frac{W_0 - S_0\Phi_0}{S_0^0}$$

On obtient

$$\begin{aligned} W_T &= S_0^0\Phi_0^0(1+r) + S_0\Phi_0\xi_1 \\ &= (1+r)\big(W_0 - S_0\Phi_0\big) + S_0\Phi_0\xi_1. \end{aligned}$$

Il y a deux cas possibles. Si $\xi_1 = u$, il vient

$$\begin{aligned} W_T &= (1+r)\Big(\varphi_N(S_0) - \frac{\varphi_{N-1}(S_0u) - \varphi_{N-1}(S_0d)}{(u-d)}\Big) \\ &\qquad + u\frac{\varphi_{N-1}(S_0u) - \varphi_{N-1}(S_0d)}{(u-d)}. \\ &= \big(p^*\varphi_{N-1}(S_0u) + (1-p^*)\varphi_{N-1}(S_0d)\big) \\ &\qquad + (1-p^*)\big(\varphi_{N-1}(S_0u) - \varphi_{N-1}(S_0d)\big) \\ &= \varphi_{N-1}(S_0u). \end{aligned}$$

De même, on peut démontrer que, si $\xi_1 = d$, alors

$$W_T = \varphi_{N-1}(S_0d).$$

De sorte que, dans tous les cas,

$$W_T = \varphi_{N-1}(S_T).$$

En réitérant l'argument, on finit par montrer, de proche en proche, que

$$W_{NT} = \varphi_0(S_{NT}) = (S_{NT} - K)_+.$$

4. Exercices

Exercice 1. On suppose qu'il existe une stratégie $(\Phi_n^0, \Phi_n)_{n\in\{0,\dots,N-1\}}$ et un temps d'arrêt τ (relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\{0,\dots,N\}}$ telle que la richesse associée vérifie

(1) $W_0 = 0$,
(2) $\mathbb{P}(W_\tau \geq 0) = 1$,
(3) $\mathbb{P}(W_\tau > 0) > 0$.

Montrer que la stratégie auto-financée, définie sur l'actif risqué par :

$$\begin{aligned} \Psi_n &= \Phi_n, \quad n \leq \tau - 1 \\ \Psi_n &= 0, \quad n \geq \tau, \end{aligned}$$

est un arbitrage.

Exercice 2. Vérifier, dans le cadre du modèle binomial à plusieurs périodes, que tout autre prix que le juste prix d'une option (d'achat ou de vente) conduit à la possibilité d'un arbitrage.

Exercice 3. On reprend le modèle binomial à N périodes avec $0 < p < 1$. On suppose qu'il y a un versement d'un dividende, égal à S_nq sur la $n$ème période. On suppose $d < 1 + r - q < u$. Donner le juste prix d'un call. Etudier la relation de parité.

Exercice 4. On considère un modèle binomial à 2 périodes avec $0 < p < 1$. On suppose qu'il y a un paiement d'un coût de stockage, égal à U sur la première période et $U(1+r)$ sur la deuxième, pour la détention d'une part de l'actif risqué. Discuter la construction d'un univers risque-neutre.

Exercice 5. On considère une fonction G, deux fois dérivable, à dérivées continues, telle que $G(0) = 0$ et $G'(0) = 0$. Montrer l'égalité

$$G(x) = \int_0^{+\infty} (x-k)^+ G''(k) dk, \quad x \geq 0.$$

Que peut-on dire de l'évaluation d'une option dont le flux terminal à échéance est $G(S_{NT})$? Que dire si $G(0)$ et $G'(0)$ ne sont pas nuls ?

CHAPITRE 4

Modèle de Black-Scholes

Dans ce chapitre, nous envisageons le passage N tend vers l'infini dans le modèle à N périodes, en prenant pour principe que chaque période est de longueur de plus en plus petite quand N tend vers l'infini.

1. Théorème limite central

1.1. Prix binomial. Rappelons que le prix binomial, dans le modèle à N périodes étudié dans le chapitre précédent, peut être écrit sous la forme

$$C = (1+r)^{-N}\mathbb{E}^*\left[\left(S_0\prod_{i=1}^{N}\xi_i - K\right)_+\right],$$

pour une option d'achat, et

$$P = (1+r)^{-N}\mathbb{E}^*\left[\left(K - S_0\prod_{i=1}^{N}\xi_i\right)_+\right],$$

pour une option de vente.

Dans les deux espérances, le produit peut être réécrit sous la forme d'une somme par passage au logarithme. Précisément, nous avons :

$$\prod_{i=1}^{N}\xi_i = \exp\left(\sum_{i=1}^{N}\ln(\xi_i)\right).$$

En posant $U_i = \ln(\xi_i)$, nous avons $U_1, \dots, U_N$ variables aléatoires indépendantes de même loi :

$$\mathbb{P}^*\big(U_i = \ln(u)\big) = p^*, \quad \mathbb{P}^*\big(U_i = \ln(d)\big) = 1 - p^*.$$

On remarque que chaque U_i peut être écrit :

$$U_i = \ln(d) + \big(\ln(u) - \ln(d)\big)V_i,$$

où les variables aléatoires $V_1, \dots, V_N$ sont indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre p^*. Cela signifie que

$$\prod_{i=1}^{N}\xi_i = \exp\left(N\ln(d) + \ln(u/d)\sum_{i=1}^{N}V_i\right).$$

De fait, les prix P et C peuvent être mis sous la forme :

$$C = (1+r)^{-N}\mathbb{E}^*\Big[\Big(S_0 \exp\Big(N\ln(d) + \ln(u/d)B_N\Big) - K\Big)_+\Big],$$
$$P = (1+r)^{-N}\mathbb{E}^*\Big[\Big(S_0 \exp\Big(N\ln(d) + \ln(u/d)B_N\Big) - K\Big)_+\Big],$$

où B_N désigne une loi binomiale de paramètres N et p^* sous la probabilité $\mathbb{P}^*$.

1.2. Discrétisation d'un prix continu. En examinant les formes de C et de P, nous constatons que le prix comptant de l'actif risqué au bout de N périodes s'écrit sous la forme

$$S_N = S_0 \exp\Big(N\ln(d) + \ln(u/d)B_N\Big).$$

Il s'agit maintenant d'intepréter les valeurs de d, u et N lorsque les options sont exercées à maturité T, pour une échéance T d'ordre de grandeur raisonnable, par exemple 3, 6 ou 12 mois. Dans ce cas, il est possible de comprendre les N périodes comme les N périodes issues du découpage de l'intervalle $[0,T]$ en N intervalles de la forme $[t_i, t_{i+1}]$, avec $t_i = i/N$ $i \in \{0,\dots,N\}$, le prix S_N décrivant alors le prix comptant d'un actif risqué à l'instant T. Dans ce contexte, le paramètre N fait office de paramètre auxiliaire, appelé paramètre de *discrétisation*, la discrétisation permettant d'expliquer le prix comptant à l'instant T à l'aide d'une dynamique définie à des instants discrets. Le cas échéant, les paramètres d et u intervenant dans la discrétisation dépendent également de N : nous les noterons d_N et u_N. En appelant μ la moyenne du prix comptant à l'échéance T et σ son écart type, nous avons (par identification de la moyenne et de l'écart type) :

$$\begin{aligned} \mu &= p_N^* N\ln(u_N) + (1-p_N^*)N\ln(d_N), \\ \sigma^2 &= Np_N^*(1-p_N^*)\ln^2(u_N/d_N), \end{aligned} \tag{1.4}$$

avec

$$p_N^* = \frac{1+r_N-d_N}{u_N-d_N}. \tag{1.5}$$

Ici, nous devons rappeler que $1+r_N$ correspond à l'actualisation sur une période de la valeur de l'argent. En désignant par λ le taux d'actualisation instantané, nous avons

$$\exp\big(\lambda\frac{T}{N}\big) = 1 + r_N. \tag{1.6}$$

Nous sommes maintenant confrontés à un problème d'ajustement. Quels ordres de grandeur devons nous choisir pour les quantités d_N, u_N et r_N pour expliquer les valeurs μ et σ du prix comptant à l'instant T.

L'équation (1.6) suggère que, pour N grand,

$$r_N \sim \frac{\lambda T}{N}.$$

Si l'on suppose une forme de symétrie entre les hausses et les baisses, il est raisonnable de poser

$$u_N = (1 + r_N)\zeta_N, \quad d_N = (1 + r_N)\zeta_N^{-1}, \tag{1.7}$$

où $\zeta_N > 1$. Les variations sur une petite période de longueur T/N du prix comptant de l'actif ne pouvant être trop brutales, il est légitime de demander $\zeta_N \to 1$ lorsque $N \to +\infty$. On écrit donc ζ sous la forme

$$\zeta_N = 1 + \varsigma_N,$$

où ς_N tend vers 0 quand N tend vers l'infini.

Ceci suggère que

$$\begin{aligned}
\frac{u_N}{d_N} &= \zeta_N^2 \sim 1 + 2\varsigma_N, \\
p_N^* &= \frac{1 - \zeta_N^{-1}}{\zeta_N - \zeta_N^{-1}} = \frac{\zeta_N - 1}{\zeta_N^2 - 1} \sim \frac{\varsigma}{2\varsigma_N} = \frac{1}{2}, \\
1 - p_N^* &= \frac{\zeta_N - 1}{\zeta_N - \zeta_N^{-1}} = \frac{\zeta_N^2 - \zeta_N}{\zeta_N^2 - 1} \sim \frac{\varsigma_N}{2\varsigma_N} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

En revenant à l'équation (1.4), nous comprenons que

$$\sigma^2 \sim \frac{N}{4}(2\varsigma_N)^2 = N\varsigma_N^2.$$

Nous en déduisons que, lorsque N tend vers l'infini, la valeur de ς_N doit être de l'ordre de $\sigma/\sqrt{N}$, c'est-à-dire :

$$\varsigma_N \sim \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

1.3. Prix comptant limite. L'analyse conduite dans la section précédente suggère d'expliquer le prix comptant d'un actif risqué à un instant T comme le résultat d'un modèle N périodes, avec N grand, pour lequel

$$\varsigma_N = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad r_N = \frac{\lambda T}{N}.$$

De façon plus précise que dans le paragraphe précédent, nous constatons que

$$p_N^* = \frac{\sigma/\sqrt{N}}{2\sigma/\sqrt{N} + \sigma^2/N} = \frac{1}{2+\sigma/\sqrt{N}} \sim \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4\sqrt{N}} + o\big(\frac{1}{\sqrt{N}}\big),$$

De même,

$$1 - p_N^* \sim \frac{1}{2} + \frac{\sigma}{4\sqrt{N}} + o\big(\frac{1}{\sqrt{N}}\big).$$

Maintenant, par (1.7),

$$\begin{aligned}\ln(u_N) &\sim \frac{\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{\sigma^2}{2N} + \frac{\lambda T}{N} + o\big(\frac{1}{N}\big),\\ \ln(d_N) &\sim -\frac{\sigma}{\sqrt{N}} - \frac{\sigma^2}{2N} + \frac{\lambda T}{N} + o\big(\frac{1}{N}\big),\end{aligned}$$

De fait,

$$\begin{aligned}&Np_N^* \ln(u_N) + N(1-p_N^*)\ln(d_N)\\ &\sim \frac{\sigma\sqrt{N}}{2}\big(1 - \frac{\sigma}{2\sqrt{N}}\big)\big(1 + \frac{\sigma}{2\sqrt{N}} + \frac{\lambda T}{\sqrt{N}\sigma}\big)\\ &\quad - \frac{\sigma\sqrt{N}}{2}\big(1 + \frac{\sigma}{2\sqrt{N}}\big)\big(1 + \frac{\sigma}{2\sqrt{N}} - \frac{\lambda T}{\sqrt{N}\sigma}\big) + o(1)\\ &= \frac{\sigma\sqrt{N}}{2}\Big(1 - \frac{\sigma^2}{4N} - 1 - \frac{\sigma^2}{4N} - \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\Big) + \lambda T + o(1)\\ &= \lambda T - \frac{\sigma^2}{2} + o(1).\end{aligned}$$

En revenant aux notations de la Sous-section 1.1, cela montre que :

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}\Bigg[\sum_{i=1}^{N} U_i^{(N)}\Bigg] = \lambda T - \frac{\sigma^2}{2},$$

en faisant attention à l'indice (N), qui indique la dépendance des variables par rapport au paramètre N.

Par ailleurs, la Sous-section précédente montre que

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{V}\Bigg[\sum_{i=1}^{N} U_i^{(N)}\Bigg] = \sigma^2.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer une version raffinée du théorème limite central (due à Lindeberg) :

THEOREM 1.1. *Si, pour tout $N \geq 1$, $U^{(1)}, \dots, U^{(N)}$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi telles que*

$$\lim_{N \to +\infty} N m_N = m, \quad m_N := \mathbb{E}\big[U_1^{(N)}\big],$$
$$\lim_{N \to +\infty} N \sigma_N^2 = \sigma^2, \quad \sigma_N := \mathbb{V}\big[U_1^{(N)}\big],$$

et,

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad |U_i^{(N)}| \leq \frac{C}{\sqrt{N}},$$

pour une constante C indépendante de N, alors,

$$\sum_{i=1}^{N} U_i^{(N)} \Rightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2),$$

où $\Rightarrow$ désigne la convergence en loi.

Ici, nous remarquons que

$$\sqrt{N}|U_i^{(N)}| \leq \sqrt{N}\big|\ln\big(1 + \frac{\lambda T}{N}\big)\big| + \sqrt{N}\big|\ln\big(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\big)\big| + 2\sqrt{N}\big|\ln\big(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\big)\big|.$$

Le membre de droite convergeant vers 3σ, nous en déduisons que la suite est bornée.

Par composition dans la limite en loi, nous affirmons :

THEOREM 1.2. *En considérant que le prix comptant d'un actif risqué à date T est obtenue comme la limite, sur N, du prix comptant dans un modèle binomial à N périodes, le prix comptant, en régime risque neutre, s'écrit*

$$S_T = S_0 \exp\big(\lambda T - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma Z\big),$$

où Z suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

On dit que S_T suit, en régime risque neutre, une loi log-normale.

En général, on écrit σ^2 sous la forme $\sigma^2 T$, le paramètre σ étant appelé volatlité du marché. Cela permet d'exprimer le paramètre de variance de la loi normale de façon linéaire à T. Ce modèle pour le prix comptant de l'actif s'appelle *modèle de Black et Scholes*.

2. Prix Black et Scholes

2.1. Passage à la limite dans les prix. Si nous revenons aux équations pour P et C dans le modèle binomial à N périodes, il est tentant de passer à la limite sur N et de remplacer l'espérance sur la loi binomiale en une espérance sous la loi gaussienne.

Naturellement, il faut justifier du passage à la limite. Rappelons que, pour une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ convergeant en loi vers une variable aléatoire X, la convergence de $\mathbb{E}[f(X_n)]$ vers $\mathbb{E}[f(X)]$ est vraie, dès lors que f est continue et bornée.

Ici, nous avons deux candidats pour la fonction f :

$$c(x) = \big(S_0 \exp(x) - K\big)_+,$$
$$p(x) = \big(K - S_0 \exp(x)\big)_+.$$

Nous remarquons que la fonction c est continue, mais non bornée. En revanche, la fonction p est bornée par K. De fait, nous pouvons affirmer :

Theorem 2.1. *Le prix Black-Scholes du put européen de maturité T, de taux d'intérêt λ et de volatilité σ, s'écrit :*

$$P = \exp\big(-\lambda T\big)\mathbb{E}^*\left[\left(K - S_0 \exp\Big(\big[\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\big]T + \sigma\sqrt{T}Z\Big)\right)_+\right],$$

où Z suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$ sous $\mathbb{P}^*$.

Pour passer à la limite dans le call, nous allons utiliser la relation de parité. Nous savons en effet que, quel que soit le nombre N de périodes,

$$C_N - P_N = S_0 - \frac{K}{(1+r)^N}.$$

De fait, il est limite de poser, à la limite :

$$C = P + S_0 - \exp(-\lambda T)K.$$

Nous comparons cette expression avec

$$\exp\big(-\lambda T\big)\mathbb{E}^*\left[\left(\exp\Big(\big[\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\big]T + \sigma Z\Big) - K\right)_+\right].$$

Le terme ci-dessus peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
&\exp\big(-\lambda T\big)\mathbb{E}^*\left[\left(S_0\exp\Big(\big[\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\big]T + \sigma Z\Big) - K\right)_+\right] \\
&= \exp\big(-\lambda T\big)\mathbb{E}^*\left[S_0\exp\Big(\big[\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\big]T + \sigma Z\Big) - K\right] + P.
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant la transformée de Laplace de la loi gaussienne, nous retrouvons exactement la valeur de C. De fait,

Theorem 2.2. *Le prix Black-Scholes du call européen de maturité T, de taux d'intérêt λ et de volatilité σ, s'écrit :*

$$C = \exp\big(-\lambda T\big)\mathbb{E}^*\left[\left(S_0 \exp\Big(\big[\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\big]T + \sigma\sqrt{T}Z\Big) - K\right)_+\right],$$

où Z suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$ sous $\mathbb{P}^*$.

2.2. Formules de Black et Scholes. La popularité du modèle de Black et Scholes tient à la possibilité de donner des formules *quasi*-explicites pour les prix C et P.

Commençons par C. Nous remarquons que la condition

$$S_0 \exp\Big((\lambda - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T} Z \Big) \geq K,$$

s'écrit

$$Z \geq \frac{\ln\big(K/S_0\big) - \big(\lambda - \sigma^2/2\big)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Nous posons

$$\begin{aligned} d_2(S_0) &= -\frac{\ln\big(K/S_0\big) - \big(\lambda - \sigma^2/2\big)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \frac{\ln\big(S_0/K\big) + \big(\lambda - \sigma^2/2\big)T}{\sigma\sqrt{T}}. \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} C &= \mathbb{E}\Big[\Big(S_0 \exp\big(-\frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma\sqrt{T} Z\big) - K\exp(-\lambda T)\Big)\mathbf{1}_{\{Z \geq d_2(S_0)\}}\Big] \\ &= \int_{-d_2(S_0)}^{+\infty} \Big(S_0 \exp\big(-\frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma\sqrt{T} y\big) - K\exp(-\lambda T)\Big) g(y)dy, \end{aligned}$$

où g désigne la densité gaussienne centrée réduite. Par changement de variables, nous obtenons

$$\begin{aligned} C &= \int_{-\infty}^{d_2(S_0)} \Big(S_0 \exp\big(-\frac{\sigma^2 T}{2} - \sigma\sqrt{T} y\big) - K\exp(-\lambda T)\Big) g(y)dy \\ &= S_0 \exp\big(-\frac{\sigma^2 T}{2}\big) \int_{-\infty}^{d_2(S_0)} \exp\big(-\sigma\sqrt{T}y\big) g(y)dy \\ &\quad - K\exp(-\lambda T)\mathcal{N}\big(d_2(S_0)\big), \end{aligned}$$

où $\mathcal{N}$ désigne la fonction de répartition de la gaussienne centrée réduite.

E, posant $z = y + \sigma\sqrt{T}$, il reste à voir que

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{d_2(S_0)} \exp\big(-\sigma\sqrt{T}y\big) g(y)dy \\ &\quad = \exp\big(\frac{\sigma^2 T}{2}\big) \int_{-\infty}^{d_1(S_0)} g(z)dz = \exp\big(\frac{\sigma^2 T}{2}\big)\mathcal{N}\big(d_1(S_0)\big), \end{aligned}$$

où $d_1(S_0) = d_2(S_0) + \sigma\sqrt{T}$. De sorte que

$$C = S_0 \mathcal{N}\big(d_1(S_0)\big) - K\exp(-\lambda T)\mathcal{N}\big(d_2(S_0)\big).$$

Le même calcul, mais pour P, montrerait que

$$P = K\exp(-\lambda T)\mathcal{N}\big(-d_2(S_0)\big) - S_0\mathcal{N}\big(-d_1(S_0)\big).$$

2.3. Couverture δ-neutre. Rappelons que la couverture δ-neutre, telle que nous l'avons définie dans le cadre du modèle binomial, est donnée sous la forme d'un taux d'accroissement. De façon générale, nous avons montré que la couverture δ-neutre à appliquer sur une période s'écrit comme le taux d'accroissement du flux à la fin de la période.

Afin de généraliser ce principe au cadre continu, il est nécessaire de comprendre, dans un premier temps, quel est l'équivalent du flux. Le paragraphe précédent suggère d'écrire, sur une période localisée autour d'un instant t (avec t comme instant initial), le flux à échéance de la période comme

$$C(T-t,S_t) = S_t\mathcal{N}\big(d_1(T-t,S_t)\big) - K\exp(-\lambda(T-t))\mathcal{N}\big(d_2(T-t,S_t)\big),$$

avec

$$\begin{aligned}
C(t,x) &= x\mathcal{N}\big(d_1(t,x)\big) - K\exp(-\lambda t)\mathcal{N}\big(d_2(t,x)\big),\\
d_2(t,x) &= \frac{\ln\big(x/K\big) + \big(\lambda - \sigma^2/2\big)t}{\sigma\sqrt{t}}\\
d_1(t,x) &= d_2(t,x) + \sigma\sqrt{t}.
\end{aligned}$$

En fait, $C(T-t,x)$ se lit comme le prix du *call* de cours initial x à l'instant t et de prix d'exercice K à maturité T. Le flux au bout d'un période de longueur h démarrant en t devrait se lire $C(T-(t+h),\cdot)$. Mais, en régime continu, les périodes sont de longueur infinitésimales, de sorte h est considéré comme nul. Ceci explique la formule proposée pour le flux à utiliser dans le calcul de la couverture δ-neutre. Au passage, nous insistons sur le retournement en temps dans l'indexation du *call* : dans la quantité $C(t,x)$, la variable t désigne la durée séparant de la maturité.

Comme nous sommes en régime continu, les taux d'accroissements sont également calculés sur des accroissements de longueur infinitésimales et sont donc à interpréter comme des dérivées. Nous calculons de fait

$$\delta(t,x) = \partial_x C(t,x).$$

La couverture en δ-neutre de l'option d'achat de prix d'exercice K est alors donnée, à l'instant t, par $\delta(T-t,S_t)$, le terme $T-t$ représentant la distance à la maturité et le δ s'interprétant, au bout du compte, comme la quantité de parts d'actif risqué détenues à l'instant t.

Nous procédons maintenant au calcul de $\delta(t,x)$. Nous commençons par remarquer que

$$\partial_x d_2(t,x) = \partial_x d_1(t,x) = \frac{1}{Kx}, \quad x > 0.$$

De fait, en désignant par g la densité gaussienne centrée réduite, il vient

$$\begin{aligned}\partial_x C_t(t,x) &= \mathcal{N}\big(d_1(t,x)\big) \\ &\qquad + \frac{1}{K} g\big(d_1(t,x)\big) - \frac{1}{x}\exp\big(-\lambda t\big) g\big(d_2(t,x)\big).\end{aligned}$$

Maintenant, nous pouvons calculer $g(d_1(t,x))/K$ à l'aide de l'expression reliant $d_1(t,x)$ à $d_2(t,x)$. Nous avons

$$g\big(d_1(t,x)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\big[-\frac{1}{2}\big(d_2(t,x)+\sigma\sqrt{t}\big)^2\big].$$

En développant le carré et en utilisant l'expression de d_2, nous obtenons

$$\begin{aligned}&g\big(d_1(t,x)\big) \\ &= g\big(d_2(t,x)\big)\exp\big[-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{t}\big] - \sigma\sqrt{t} d_2(t,x)\big] \\ &= g\big(d_2(t,x)\big)\exp\big[-\ln(x/K) - \lambda t\big] \\ &= \frac{K}{x} g\big(d_2(t,x)\big)\exp\big[-\lambda t\big],\end{aligned} \tag{2.8}$$

ce qui suffit pour démontrer que

$$\partial_x C(t,x) = \mathcal{N}\big(d_1(t,x)\big).$$

De la même façon, en définissant

$$P(t,x) = K\exp\big(-\lambda t\big)\mathcal{N}\big(-d_2(t,x)\big) - x\mathcal{N}\big(-d_1(t,x)\big),$$

on pourrait démontrer que

$$\partial_x P(t,x) = -\mathcal{N}\big(-d_1(t,x)\big),$$

avec une application similaire.

3. Formulation EDP

3.1. Convolution par la gaussienne. Dans la section précédente, nous avons défini le prix Black Scholes du *call* européen de prix d'exercice K à échéance t et de prix comptant initial x comme

$$C(t,x) = \exp(-\lambda t)\int_{\mathbb{R}}\big[x\exp\big((\lambda - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma\sqrt{t}y\big) - K\big]_+ g(y)dy,$$

où g désigne la densité gaussienne centrée réduite.

En utilisant le logarithme, il est possible de réécrire cette quantité comme :

$$C(t,x) = \exp(-\lambda t)\int_{\mathbb{R}} \big[\exp\big((\lambda - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma\sqrt{t}y + \ln(x)\big) - K\big]_+ g(y)dy.$$

On peut maintenant faire un changement de variable dans cette expression en posant :

$$z = \ln(x) + (\lambda - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma\sqrt{t}y \Leftrightarrow y = \frac{z - \ln(x) - (\lambda - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}.$$

On obtient comme nouvelle expression de $C(t,x)$:

$$C(t,x) = \frac{\exp(-\lambda t)}{\sigma\sqrt{t}}\int_{\mathbb{R}} \big[\exp(z) - K\big]_+ g\Big(\frac{z - \ln(x) - (\lambda - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}\Big)dz.$$

Le changement de variable permet de 'sortir' les termes '$\ln(x)$' et $(\lambda - \sigma^2/2)t$ du flux terminal et de les rentrer dans la fonction g. Le bénéfice est le suivant : la fonction g est infiniment différentiable alors que le flux $(\cdot - K)_+$ ne l'est pas. Pas ce changement de variable, on espère ici différentier C par rapport à x et t autant de fois que l'on veut, dès lors que t est strictement positif. En fait, cet argument a été utilisé implicitement dans le calcul du δ.

Definition 3.1. *Etant donnée une fonction continue $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on appelle convolution de la fonction ϕ par la densité gaussienne de variance σ^2 la fonction notée $\phi \star g_\sigma$ définie par*

$$\big(\phi \star g_\sigma\big)(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi(y) g_\sigma(x-y)dy,$$

où la fonction $g_\sigma : y \mapsto \sigma^{-1}g(y/\sigma)$ désigne la densité gaussienne de variance σ^2.

La convolution est bien définie si la fonction ϕ est à croissance au plus polynomiale, c'est-à-dire s'il existe un entier $p \geq 0$ et une constante $C \geq 0$ tels que $|\phi(x)| \leq C(1 + |x|^p)$.

Nous admettons la propriété suivante :

Proposition 3.2. *Sous les hypothèses de la définition ci-dessus, la fonction est infiniment différentiable et, pour tout $k \geq 1$,*

$$\big(\phi \star g_\sigma\big)^{(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi(y) g_\sigma^{(k)}(x-y)dy.$$

En définissant la fonction

$$\phi(y) = \big(y - K\big)_+,$$

nous en déduisons que $C(t,x)$ peut être réécrit sous la forme :

$$C(t,x) = \exp(-\lambda t)\big(\phi \star g_{\sigma\sqrt{t}}\big)\big[\ln(x) + \big(\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\big)t\big].$$

Ceci montre que, pour tout $t > 0$, la fonction C est infiniment sur $\mathbb{R}$.

3.2. EDP Black Scholes. Nous remarquons que la fonction $(t,x) \mapsto g_{\sigma\sqrt{t}}(x)$ vérifie

$$\begin{aligned}\partial_x^2\big[g_{\sigma\sqrt{t}}(x)\big] &= -\partial_x\big[\frac{x}{\sigma^2 t} g_{\sigma\sqrt{t}}(x)\big]\\ &= -\frac{1}{\sigma^2 t} g_{\sigma\sqrt{t}}(x) + \frac{x^2}{\sigma^4 t} g_{\sigma\sqrt{t}}(x),\end{aligned}$$

et

$$\partial_t\big[g_{\sigma\sqrt{t}}(x)\big] = -\frac{1}{2t} g_{\sigma\sqrt{t}}(x) + \frac{x^2}{2\sigma^2 t^2} g_{\sigma\sqrt{t}}(x),$$

de sorte que

$$\partial_t\big[g_{\sigma\sqrt{t}}(x)\big] = \frac{\sigma^2}{2}\partial_x^2\big[g_{\sigma\sqrt{t}}(x)\big].$$

Ceci nous incite à comparer les dérivées de C en t et en x. Nous savons déjà que

$$\partial_x C(t,x) = \mathcal{N}\big(d_1(t,x)\big),$$

de sorte que

$$\partial_x^2 C(t,x) = \partial_x d_1(t,x) g\big(d_1(t,x)\big) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{t}} g\big(d_1(t,x)\big).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\partial_t C(t,x) = \partial_t\big[d_1(t,x)\big] x g\big(d_1(t,x)\big) + \lambda K \exp(-\lambda t)\mathcal{N}\big(d_2(t,x)\big)\\ - K\exp(-\lambda t)\partial_t\big[d_2(t,x)\big] g\big(d_2(t,x)\big).\end{aligned}$$

On calcule

$$\partial_t\big(d_1(t,x)\big) = \partial_t\big(d_2(t,x)\big) + \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{t}}.$$

En rappelant la formule (2.8), nous en déduisons que

$$\partial_t C(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{t}} x g\big(d_1(t,x)\big) + \lambda K \exp(-\lambda t)\mathcal{N}\big(d_2(t,x)\big).$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sigma^2x^2\partial_x^2C(t,x)+\lambda x\partial_xC(t,x)-\lambda C\\
&=\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{t}}xg\big(d_1(t,x)\big)+\lambda x\mathcal{N}\big(d_1(t,x)\big)-\lambda x\mathcal{N}\big(d_1(t,x)\big)\\
&\qquad+\lambda K\exp(-\lambda t)\mathcal{N}\big(d_2(t,x)\big)\\
&=\partial_tC(t,x).
\end{aligned}$$

Nous en déduisons :

PROPOSITION 3.3. *Le prix $C(t,x)$ du call européen de prix d'exercice K d'échéance $t>0$ et de prix initial x vérifie l'équation dite aux dérivées partielles (EDP) :*

$$\partial_tC(t,x)=\frac{1}{2}\sigma^2x^2\partial_x^2C(t,x)+\lambda x\partial_xC(t,x)-\lambda C(t,x),$$

avec la condition

$$C(0,x)=(x-K)_+.$$

3.3. Généralisation. Dans la Proposition 3.3, le temps est inversé au sens où le flux est exprimé à l'instant 0 à travers la condition $C(0,x)$. Il est possible de retourner le temps en rempliçant $C(t,x)$ par $C(T-t,x)$ où T désigne la maturité de l'option. Le cas échéant, $C(T-t,x)$ désigne le prix à l'instant t, séparé de la durée $T-t$ de l'échéance T. Et la fonction $C(T-\cdot,\cdot)$ vérifie

$$\begin{aligned}
&\partial_tC(T-t,x)\\
&\qquad+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\partial_x^2C(T-t,x)+\lambda x\partial_xC(T-t,x)-\lambda C(T-t,x)=0,
\end{aligned}$$

avec la condition terminale $C(T,x)=(x-K)_+$. (La condition terminale est particulièrement bien adaptée à la notion de flux à échéance.)

Cette équation peut être généralisée au cas d'une volalité dite locale, c'est-à-dire dépendant du temps et du prix courant. Il s'agit alors de remplacer σ par une fonction $\sigma(t,x)$.

4. Exercices : dérivation de la formule de Black et Scholes

Exercice 1. Dans le modèle de Black et Scholes de taux d'intérêt λ et de volatilité σ, démontrer que la loi risque neutre du prix comptant à l'instant T admet pour densité :

$$p(T,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma x}\exp\Big[-\frac{1}{2\sigma^2T}\big(\ln(x)-\ln(S_0)-\lambda T+\sigma^2T/2\big)^2\Big]\mathbf{1}_{\{x>0\}},$$

où S_0 désigne le prix initial de l'actif.

Exercice 2. Dans le modèle de Black et Scholes de taux d'intérêt λ et de volatilité σ, on appelle $C(T,x)$ le prix du call de maturité T, de prix d'exercice K et de prix initial comptant x. Démontrer que :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{[\partial C/\partial t](T,x) - \lambda x[\partial C/\partial x](T,x) + \lambda C(T,x)}{x^2[\partial^2 C/\partial x^2](T,x)}.$$

Que penser de l'utilisation pratique de cette formule ?

Exercice 3. Dans le modèle de Black et Scholes de taux d'intérêt λ et de volatilité σ, on appelle $C(T,x,K)$ le prix du call de maturité T, de prix d'exercice K et de prix initial comptant x. Démontrer que :

$$\partial_K^2 C(T,x,K) \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma K}\exp\Big[-\frac{1}{2\sigma^2 T}\big(\ln(K) - \ln(x) - \lambda T + \sigma^2 T/2\big)^2\Big].$$

Exercice 4. Dans le modèle de Black et Scholes de taux d'intérêt λ et de volatilité σ, on appelle $C(T,x,K)$ le prix du call de maturité T, de prix d'exercice K et de prix initial comptant x. Démontrer la formule dite de 'Dupire' (du nom de Bruno Dupire, qui a montré son intérêt en finance) :

$$\sigma^2 = 2\frac{[(\partial C/\partial T) + \lambda K(\partial C/\partial K)](T,x,K)}{K^2[\partial^2 C/\partial K^2](T,x,K)}.$$

Quel est l'intérêt de cette formule ?

5. Exercices : Autour de la méthode de Monte Carlo

Dans cette liste d'exercices, nous nous intéressons à un calcul de type Monte-Carlo pour les quantités suivantes

$$C = \mathbb{E}\big[\big(\exp(\beta Z) - K\big)_+\big], \quad P = \mathbb{E}\big[\big(K - \exp(\beta Z)\big)_+\big],$$

où $\beta > 0$, $K \in \mathbb{R}$ et $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Dans ce contexte, on posera

$$X = \big(\exp(\beta Z) - K\big)_+, \quad Y = \big(K - \exp(\beta Z)\big)_+.$$

Exercice 1. Montrer qu'à un facteur multiplicatif près, on peut toujours ramener l'étude des prix Black-Scholes aux prix C et P.

Exercice 2. Démontrer la formule

$$C - P = \exp\big(\frac{\beta^2}{2}\big) - K.$$

En déduire que

$$0 \le C \le \exp\big(\frac{\beta^2}{2}\big).$$

Exercice 3.

(1) Démontrer que la variance de Y est majorée par K^2.

(2) Pour deux réels a et b, démontrer l'inégalité
$$(a+b)^2 \geq \frac{1}{2}a^2 - b^2.$$

(3) En choisissant $a = X - Y$ et $b = Y$, en déduire que
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[X^2\big] &\geq \frac{1}{2}\mathbb{E}\big[\big(\exp(\beta Z) - K\big)^2\big] - K^2 \\ &\geq \frac{1}{4}\exp(2\beta^2) - \frac{3}{2}K^2.\end{aligned}$$

(4) Montrer finalement que
$$\mathbb{V}(X) \geq \frac{1}{4}\exp(2\beta^2) - \exp(\beta^2) - \frac{3}{2}K^2.$$
Comment se comporte la variance de X quand β est grand ?

(5) En comparant les variances de X et Y, discuter la mise en place d'une méthode de Monte Carlo.

Exercice 4. Dans le cas où $K = 1$, démontrer que C peut être mis sous la forme :
$$C = \mathbb{E}^*\left[\frac{\big(1-\exp(\beta\sqrt{Y})\big)_+ + \big(1-\exp(-\beta\sqrt{Y})\big)_+}{\sqrt{2\pi}\sqrt{Y}}\right],$$
où Y suit une loi exponentielle de paramètre 1/2. Quelle utilisation peut on envisager ?

CHAPITRE 5

Options américaines

Dans cette dernière partie du cours, nous abordons les options américaines, qui, à la différence des options européennes, peuvent être exercées à tout de moment.

1. Principe et formule de juste prix

1.1. Exercice des options américaines. Une option américaine est, comme une option européenne, un droit. Celui de pouvoir acheter ou vendre un actif à un prix préalablement fixé. Dans le cadre des options européennes, ce prix est fixé pour un exercice de l'option à la maturité [1]. Dans le cadre des options américaines, l'option peut être exercée à tout moment entre la date de signature de contrat et la maturité.

Sur le plan de la modélisation, se pose la question de savoir comment modéliser un instant d'exercice de l'option. Dans ce contexte, l'agent est supposé prendre ses décisions en fonction des informations observées dans le passé (sous peine de détenir des informations caracéristiques d'un délit d'initié). Autrement dit, en reprenant la modélisation utilisée pour décrire un marché financier à N périodes et en désignant par $\tau : \Omega \to \{0, \dots, N\}$ l'instant d'exercice de l'option, il est légitime d'imposer la condition

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n,$$

c'est à dire τ est un temps d'arrêt.

Dans ce contexte, le flux à l'exercice de l'option d'achat est donné par

$$\big(S_\tau - K\big)_+,$$

où K est le prix d'exercice de l'option et avec une formule équivalent pour l'option de vente.

La difficulté dans la valorisation de l'option tient à la liberté qu'il y a dans l'instant d'exercice : τ peut être choisi de façon arbitraire dans l'ensemble $\mathcal{T}_{0,N}$ des temps d'arrêt à valeurs dans $\{0, \dots, N\}$.

1. On prendra pour principe qu'un agent exerce toujours l'option. En effet, dire qu'un agent n'exerce pas l'option, c'est dire qu'il exercice à flux nul.

1.2. Richesse arrêtée. En marché complet (tel le modèle binomial) de probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$, nous savons que la réplication de l'option européenne est toujours possible. Etant donné un temps d'arrêt τ comme ci-dessus, intéressons nous, dans le cad du *call*, à la réplication du flux $(S_\tau - K)_+$.

Etant donnée une stratégie $(\phi_n^0, \phi_n)_{0\leq n\leq N}$ (de carré intégrable sous $\mathbb{P}^*$) de richesse associée $(W_n)_{0\leq n\leq N}$ telle que

$$W_\tau = (S_\tau - K)_+,$$

nous savons que $((1+r)^{-n}W_n)_{0\leq n\leq N}$ est une martingale sous la probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$. Considérons maintenant le processus $((1+r)^{-(n\wedge\tau)}W_{n\wedge\tau})_{0\leq n\leq N}$, appelé processus de richesse arrêté. Nous allons vérifier que

Proposition 1.1. *Le processus de richesse arrêté est une martingale sous la probabilité risque-neutre.*

Démonstration. L'intégrabilité est vérifiée de façon assez simple puisque

$$|W_{n\wedge\tau}| \leq \sum_{n=0}^{N} |W_n|.$$

Examinons la mesurabilité. Il est possible d'écrire :

$$W_{n\wedge\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} W_k \mathbf{1}_{\{\tau=k\}} + W_n \mathbf{1}_{\{\tau\geq n\}}.$$

En utilisant les propriétés d'adaptabilité du processus de richesse et les propriétés du temps d'arrêt, il est facile de montrer que $W_{n\wedge\tau}$ est nécessairement $\mathcal{F}_n$-mesurable.

Il reste à vérifier la propriété projective. Calculons, pour $0\leq n\leq N-1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*\big[W_{(n+1)\wedge\tau}|\mathcal{F}_n\big] &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}^*\big[W_k\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}|\mathcal{F}_n\big] + \mathbb{E}^*\big[W_{n+1}\mathbf{1}_{\{\tau\geq n+1\}}|\mathcal{F}_n\big]\\ &= \sum_{k=0}^{n} W_k\mathbf{1}_{\{\tau=k\}} + \mathbb{E}^*\big[W_{n+1}\mathbf{1}_{\{\tau\geq n+1\}}|\mathcal{F}_n\big].\end{aligned}$$

En remarque que $\{\tau \geq n+1\}^{\complement} = \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*\big[W_{(n+1)\wedge\tau}|\mathcal{F}_n\big] &= \sum_{k=0}^{n} W_k \mathbf{1}_{\{\tau=k\}} + \mathbf{1}_{\{\tau\geq n+1\}}\mathbb{E}^*\big[W_{n+1}|\mathcal{F}_n\big] \\ &= \sum_{k=0}^{n} W_k \mathbf{1}_{\{\tau=k\}} + W_n \mathbf{1}_{\{\tau\geq n+1\}},\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

De ce résultat, nous déduisons que

$$(1+r)^{-n\wedge\tau} W_{n\wedge\tau} = \mathbb{E}^*\big[(1+r)^{-\tau}(S_\tau - K)_+\big].$$

En particulier, le cas échéant, la valeur initiale de la richesse est donnée par :

$$W_0 = \mathbb{E}^*\big[(1+r)^{-\tau}(S_\tau - K)_+\big].$$

1.3. Arbitrages. Pour le même temps d'arrêt τ qu'au-dessus, supposons que le prix de l'option américaine vaille $C < W_0$. Clairement, dès lors qu'il existe une stratégie de réplication pour la richesse calculée ci-dessus, il est possible de procéder à un arbitrage. On peut emprunter W_0 à l'instant 0 en suivant la stratégie de réplication. La dette s'élève à $(S_\tau - K)_+$ à l'instant τ. Avec les W_0, on achète une option. En exerçant l'option à l'instant τ, on rembourse la dette. On empoche la différence. On en déduit que, si la réplication est possible, le juste prix C de l'option doit vérifier

$$C \geq \max_{\tau\in\mathcal{T}(0,N)} \mathbb{E}^*\big[(1+r)^{-\tau}(S_\tau - K)_+\big].$$

On remarque le terme de droite est bien un maximum (sur un espace d'état fini). En particulier, on peut trouver un τ^* qui 'réalise' le maximum.

Supposons que l'inégalité soit stricte. Alors, en vendant l'option au prix C et en supposant connu la stratégie τ utilisée par l'acheteur, on utilise une partie de C pour réaliser $(S_\tau - K)_+$.

Ceci suggère que le juste prix est donné par

$$C = \max_{\tau\in\mathcal{T}(0,N)} \mathbb{E}^*\big[(1+r)^{-\tau}(S_\tau - K)_+\big].$$

Nous reviendrons plus en détail sur l'arbitrage dans la section suivante.

2. Enveloppe de Snell

2.1. Formule d'arrêt optimal si $N = 1$. Dans le cas d'un modèle à 1 période, on remarque τ ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1. Mais, comme $\{\tau = 0\} \in \mathcal{F}_0$, cela signifie que la valeur de τ est déteministe. De fait, il n'y a que deux possibilités pour

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^*\big[(1+r)^{-\tau}(S_\tau - K)_+\big] \\ &= (S_0 - K)_+ \mathbf{1}_{\{\tau=0\}} + (1+r)^{-1}\mathbb{E}^*\big[(S_1 - K)_+\big]\mathbf{1}_{\{\tau=1\}}.\end{aligned}$$

A ce moment là, le prix C vaut

$$C = \max\Big((S_0 - K)_+, (1+r)^{-1}\mathbb{E}^*\big[(S_1 - K)_+\big]\Big).$$

2.2. Extension au modèle à N périodes. Dans le cas où $N \geq 1$, le calcul de C ci-dessus suggère de définir

$$U_N = (1+r)^{-N}(S_N - K)_+,$$

puis

$$U_{N-1} = \max\Big((1+r)^{-N+1}(S_{N-1} - K)_+, \mathbb{E}^*\big(U_N|\mathcal{F}_{N-1}\big)\Big),$$

puis, par récurrence descendante

$$U_n = \max\Big((1+r)^{-n}(S_n - K)_+, \mathbb{E}^*\big(U_{n+1}|\mathcal{F}_n\big)\Big).$$

On dit que $(U_n)_{0\leq n\leq N}$ est l'enveloppe de Snell de la suite $((1+r)^{-n}(S_n - K)_+)_{0\leq n\leq N}$.

Nous allons démontrer :

$$U_0 = \max_{\tau\in\mathcal{T}(0,N)} \mathbb{E}^*\big((1+r)^{-\tau}(S_\tau - K)_+\big). \tag{2.9}$$

Nous allons commencer par démontrer :

Lemma 2.1. *Définissons le temps $\nu_0 = \inf\{n \geq 0 : U_n = (1+r)^{-n}(S_n - K)_+\}$. Alors, la suite $(U_{n\wedge\nu_0})_{0\leq n\leq N}$ est une martingale sous $\mathbb{P}^*$.*

Démonstration. La fait que ν_0 soit un temps d'arrêt est immédiat.

L'intégrabilité et l'adaptabilité de la suite $(U_{n\wedge\nu_0})_{0\le n\le N}$ peuvent être démontrées comme dans la proposition précédente. Calculons maintenant

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^*\big[U_{(n+1)\wedge\nu_0}|\mathcal{F}_n\big]\\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}^*\big[U_k \mathbf{1}_{\{\nu_0=k\}}|\mathcal{F}_n\big] + \mathbb{E}^*\big[U_{n+1}\mathbf{1}_{\{\nu_0\ge n+1\}}|\mathcal{F}_n\big]\\
&= \sum_{k=0}^{n} U_k \mathbf{1}_{\{\nu_0=k\}} + \mathbf{1}_{\{\nu_0\ge n+1\}}\mathbb{E}^*\big[U_{n+1}|\mathcal{F}_n\big]
\end{aligned}$$

Par construction, nous savons que

$$U_n = \max\Big((1+r)^{-n}(S_n-K)_+, \mathbb{E}^*\big(U_{n+1}|\mathcal{F}_n\big)\Big),$$

Sur l'événement $\{\nu_0 \ge n+1\}$, nous avons que $U_n > (1+r)^{-n}(S_n-K)_+$ (l'égalité n'est pas encore atteinte et par récurrence U_n est toujours supérieur ou égal à $(1+r)^{-n}(S_n-K)_+$). De fait, U_n doit être égal à $\mathbb{E}^*(U_{n+1}|\mathcal{F}_n)$, de sorte que

$$\mathbb{E}^*\big[U_{(n+1)\wedge\nu_0}|\mathcal{F}_n\big] = \sum_{k=0}^{n} U_k \mathbf{1}_{\{\nu_0=k\}} + \mathbf{1}_{\{\nu_0\ge n+1\}} U_n = U_{n\wedge\nu_0}.$$

□

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer (2.9). Puisque $(U_{n\wedge\nu_0})_{0\le n\le N}$ est une martingale, nous avons que

$$\begin{aligned}
U_0 &= \mathbb{E}^*\big[U_{N\wedge\nu_0}\big] = \mathbb{E}^*\big[U_{\nu_0}\big]\\
&= \mathbb{E}^*\big[(1+r)^{-\nu_0}(S_{\nu_0}-K)_+\big] \le \max_{\tau\in\mathcal{T}(0,N)} \mathbb{E}^*\big[(1+r)^{-\tau}(S_\tau-K)_+\big].
\end{aligned}$$

Pour démontrer l'égalité, nous remarquons que, par construction,

$$U_n \ge \mathbb{E}^*\big[U_{n+1}|\mathcal{F}_n\big],$$

c'est à dire $(U_n)_{0\le n\le N}$ est une sur-martingale. En suivant les mêmes arguments que précédemment, on peut montrer que, pour tout $\tau \in \mathcal{T}(0,N)$, $(U_{n\wedge\tau})_{0\le n\le N}$ est aussi une sur-martingale. De fait, nécessairement,

$$U_0 \ge \mathbb{E}^*\big[U_\tau\big] \ge \mathbb{E}^*\big[(1+r)^{-\tau}(S_\tau-K)_+\big].$$

2.3. Propriété sur-martingale. Nous remarquons de façon claire :

Lemma 2.2. *La suite $(U_n)_{n\ge 0}$ est une surmartingale.*

Nous en déduisons :

LEMMA 2.3. *Le processus* $(V_n)_{0\leq n\leq N}$*, défini par* $V_0 = U_0$ *et*

$$V_{n+1} = V_n + U_{n+1} - U_n - \mathbb{E}\big(U_{n+1} - U_n|\mathcal{F}_n\big)$$

est une martingale. Elle vérifie $V_n \geq U_n$*, pour tout* $n \in \{0, \dots, N\}$*, et* $V_n = U_n$ *pour tout* $n \in \{0, \dots, \nu_0\}$*.*

DÉMONSTRATION. Il est clairement que le processus $(V_n)_{0\leq n\leq N}$ est adapté et intégrable. Par ailleurs, la propriété martingale est évidente. Par propriété surmartingale, nous observons que

$$V_{n+1} - V_n \geq U_{n+1} - U_n,$$

ce qui montre par récurrence que $V_n \geq U_n$ pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$.

L'égalité est vérifiée jusqu'à l'instant ν_0 en raison de la propriété martingale de $(U_{n\wedge\nu_0})_{0\leq n\leq N}$.

En effet, sur l'événement $\{n \leq \nu_0 - 1\}$,

$$\mathbb{E}\big[U_{n+1} - U_n|\mathcal{F}_n\big] = \mathbb{E}\big[U_{(n+1)\wedge\nu_0} - U_{n\wedge\nu_0}|\mathcal{F}_n\big] = 0.$$

□

2.4. Application à l'arbitrage. Nous pouvons maintenant traiter la question de l'arbitrage de façon complète. En reprenant la preuve de (2.9), il est possible de démontrer :

$$U_n = \max_{\tau\in\mathcal{T}(n,N)} \mathbb{E}^*\big((1+r)^{-\tau}(S_\tau - K)_+|\mathcal{F}_n\big).$$

Supposons maintenant que le prix C de l'option soit strictement supérieur à U_0 et qu'il existe une stratégie de réplication qui permette de répliquer $(V_n)_{0\leq n\leq N}$, c'est-à-dire telle que la richesse actualisée $((1+r)^{-n}W_n)_{0\leq n\leq N}$ coïncide avec $(V_n)_{0\leq n\nu_0}$.

Alors, en vendant l'option au prix C, le vendeur peut investir U_0 et suivre la stratégie de réplication. Lorsque l'acheteur de l'option exerce. Il exige une compensation $(S_\tau - K)_+$ au vendeur. Le vendeur a alors à disposition $V_\tau \geq U_\tau$. Mais comme $U_\tau \geq (S_\tau - K)_+$, le vendeur de l'option est en mesure de faire face. De sorte que, finalement, son gain est de $C - U_0$.

3. Exercices

Exercice 1. Comparer les prix des call et put américains aux prix des call et put européens. Essayer de justifier.

Exercice 2. On appelle C et P les prix des call et put américains :

$$C = \max_{\tau \in \mathcal{T}(0,N)} \mathbb{E}^*\big[(1+r)^{-\tau}(S_\tau - K)_+\big],$$

$$P = \max_{\tau \in \mathcal{T}(0,N)} \mathbb{E}^*\big[(1+r)^{-\tau}(K - S_\tau)_+\big].$$

(1) Démontrer que, pour tout temps d'arrêt $\tau \in \mathcal{T}(0,N)$,

$$\mathbb{E}^*\big[(1+r)^{-\tau}(S_\tau - K)_+\big] - \mathbb{E}^*\big[(1+r)^{-\tau}(K - S_\tau)_+\big]$$
$$= S_0 - K\mathbb{E}^*\big[(1+r)^{-\tau}\big].$$

(2) En désignant par τ^* un temps d'arrêt réalisant le maximum dans C, démontrer que

$$C - P \geq S_0 - K\mathbb{E}^*\big[(1+r)^{-\tau^*}\big]$$

En déduire que

$$C - P \geq S_0 - K.$$

(3) En utilisant τ_*, un temps d'arrêt réalisant le maximum dans P, démontrer que

$$C - P \leq S_0 - K(1+r)^{-N}.$$

(4) En déduire que

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - K(1+r)^{-N}.$$

Projet : Options barrières

On appelle une option d'achat barrière une option pour laquelle le flux à échéance s'écrit sous la forme

$$(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\{\sup_{0\le t\le T} S_t < a\}},$$

où S_t désigne le prix comptant de l'actif à l'instant t, T désigne la maturité, et a désigne une barrière supérieure à K.

Le projet vise à étudier le juste de prix de cette option tant du point de vue théorique que numérique.

Sur le plan théorique, on pourra :

(1) Considérer une version discrète, où le temps est indexée par des entiers naturels,

(2) Commencer par regarder un modèle à une période et décrire, dans le cadre du modèle binomial, le juste prix de l'option et la couverture δ-neutre,

(3) Envisager un modèle à plusieurs périodes de type 'arbre binomial' (pour cela, on pourra introduire le temps d'arrêt $\tau = \inf\{t \ge 0 : S_t \ge a\}$).

(4) Réfléchir, éventuellement, à un passage à la limite lorsque le nombre de périodes tend vers l'infini, sur le principe du modèle de Black Scholes.

Sur le plan numérique, on pourra :

(1) Réfléchir à la mise en place d'une méthode de Monte-Carlo,

(2) Réfléchir à la mise en place d'une méthode récursive de type arborescente.

Projet : Options sur indices

On appelle option sur panier d'actifs une option portant sur une combinaison convexe d'actifs, c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^{d} \alpha_i S_t^i,$$

où les $(\alpha_i)_{0 \le i \le d}$ sont positifs et de somme égale à 1.

Dans la combinaison ci-dessus, $(S_t^0)_{0 \le t \le T}$ désigne le prix comptant de l'actif sans risque entre 0 et T, où T est l'échéance de l'option, et, pour chaque $i \in \{1, \dots, d\}$, $(S_t^i)_{0 \le t \le T}$ désigne le prix comptant d'un actif risqué.

Le projet vise à étudier le juste de prix de cette option tant du point de vue théorique que numérique.

Sur le plan théorique, on pourra :

(1) Considérer une version discrète, où le temps est indexée par des entiers naturels,

(2) Commencer par regarder un modèle à une période et décrire, dans ce contexte, ce que pourrait être l'équivalent du modèle binomial. Il s'agirait, alors, de proposer une formule pour le juste prix de l'option et la couverture δ-neutre,

(3) Envisager un modèle à plusieurs périodes de type 'arbre binomial',

(4) Réfléchir à un passage à la limite lorsque le nombre de périodes tend vers l'infini, sur le principe du modèle de Black Scholes.

Sur le plan numérique, on pourra :

(1) Réfléchir à la mise en place d'une méthode de Monte-Carlo, en faisant un effort tout particulier sur la possible réduction de la variance.

(2) Considérer plus particulièrement le cas d'actifs corrélés, pour lesquels le prix du *call* est donné par une extension de la formule de Black et Scholes :

$$C = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{d} \alpha_i S_0^i \exp\bigl(-\frac{\sigma_i^2}{2}T + \sqrt{T}(\sigma G)^i\bigr) - K\exp(-rT)\right)_+\right],$$

où le vecteur $(s_0^1, \ldots, s_0^d)$ désigne le vecteur des cours à l'instant 0 des actifs considérés, r le taux d'intérêt supposé constant, $(G_1, \ldots, G_d)$ un vecteur gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance Id, et σ une matrice symétrique définie positive appelée matrice de volatilité. Le vecteur $(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_d^2)$ est le vecteur des normes de chaque ligne de la matrice σ

Projet : Options asiatiques

On appelle option asiatique une option portant sur la moyenne temporelle d'un actif , le flux à échéance s'écrivant sous la forme

$$\Big(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt - K\Big)_+,$$

où S_t désigne le prix comptant de l'actif à l'instant t, T désigne la maturité, et K le prix d'exercice.

Le projet vise à étudier le juste de prix de cette option tant du point de vue théorique que numérique.

Sur le plan théorique, on pourra :

(1) Considérer une version discrète, où le temps est indexée par des entiers naturels,

(2) Commencer par regarder un modèle à une période et décrire, dans ce contexte, ce que pourrait être l'équivalent du modèle binomial. Il s'agirait, alors, de proposer une formule pour le juste prix de l'option et la couverture δ-neutre,

(3) Envisager un modèle à plusieurs périodes de type 'arbre binomial' et montrer, dans ce cadre, qu'il est possible de se ramener à un modèle à une période quitte à prendre des flux dépendant à la fois du prix comptant de l'actif et de la moyenne des prix comptants.

(4) Réfléchir à un passage à la limite lorsque le nombre de périodes tend vers l'infini, sur le principe du modèle de Black Scholes. On pourra se focaliser sur l'obtention d'une majoration du call par comparaison avec la formule de Black Scholes.

Sur le plan numérique, on pourra :

(1) Réfléchir à la mise en place d'une méthode de Monte-Carlo, en faisant un effort tout particulier sur la possible réduction de la variance.

(2) Comparer les résultats obtenus avec la majoration trouvée dans la partie théorique.