Population de neurones en interaction champ moyen

Séminaire Neurosciences
Université de Jussieu

François Delarue (Nice – J.-A. Dieudonné)

14 Octobre 2013

(Collaboration avec J. Inglis, S. Rubenthaler et E. Tanré)

Motivation

- Interactions entre différentes populations de neurones
  - Exemple : implication dans le langage (Brunel, Lavigne)
- Au sein d'une population
  - Modélisation par un « neurone typique »
  - Dynamique du « neurone typique » reflète interactions au sein de la population
  - Approche de champ moyen : interactions entre les neurones au sein de la population $\rightsquigarrow$ interaction du « neurone typique » avec sa propre loi statistique
  - Exemple : neurone « intègre et décharge » en interaction avec son propre taux de décharge

Plan

- Principe des modèles de champ moyen
  - Exemple : modèle intègre et décharge de type champ moyen
  - Lien avec les descriptions analytiques (EDP)
- Formalisation mathématique
  - Caractère bien posé du modèle ?
  - Justification (théorique) de l'approche de champ moyen ?
- Perspectives
  - Affaiblissement de la notion mathématique de solutions ?
  - Vers de la synchronisation ?

Modèle intègre–décharge en interaction

- Modèle « intègre et décharge » à 1 neurone

$$V_t = V_R - \lambda \int_0^t V_s ds + I_t + W_t$$

  - $(I_t)_{t\geq 0} \rightsquigarrow$ signal, $(W_t)_{t\geq 0} \rightsquigarrow$ bruit (brownien)
  - décharge lorsque V_t dépasse seuil V_F

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : V_t \geq V_F\}$$

  - après décharge $\rightsquigarrow$ retour à V_R (pas de latence)
- Modèle avec interactions : N neurones $V_t^1, \ldots, V_t^N$
  - $I_t^i \rightsquigarrow I_t^i(V^j, j \neq i)$ (signal dépend états autre neurones)
  - $(W_t^i)_{t\geq 0} \rightsquigarrow$ bruits sur chaque neurone

Interaction champ moyen

- Principe interaction de champ moyen
  - $I_t^i(V^j, j \neq i)$ ne dépend que de l'état moyen du système

$$I_t^i(V^j, j \neq i) = I_t^i\left(N^{-1} \sum_{j \neq i} \delta_{V^j}\right)$$

- Exemple (Brunel, Hakim, Ostojic)

$$I_t^i(V^j, j \neq i) = \frac{\alpha^i}{N} \sum_{j \neq i} \sum_{s<t} \mathbf{1}_{\{V_{s-}^j = V_F\}} + \frac{\beta^i}{N} \sum_{j \neq i} \int_0^t V_s^j ds$$

  - influence du taux moyen de décharge et du potentiel moyen (pas de retard)
  - influence excitatrice ou inhibitrice
  - $\alpha = \alpha^i$ et $\beta = \beta^i \rightsquigarrow$ neurones similaires (modulo le bruit) !

Moyennisation

- Hypothèse sur les bruits
  - $\left((W_t^i)_{t\geq 0}\right)_{1\leq i\leq N}$ indépendants
- Décorrélation
  - Corrélation entre neurones diminue quand $N \to +\infty$
- Moyennisation
  - Similitude des neurones + décorrélation $\Rightarrow$ moyennisation

(loi des grands nombres)

$$I_t^i(V^j, j \neq i) \underset{N\to+\infty}{\sim} \alpha\mathbb{E}(M_t) + \beta \int_0^t \mathbb{E}(V_s)ds$$

- $M_t =$ nombre de décharge jusqu'à t

- Neurone typique pour N grand (avant décharge)

$$V_t = V_R - \lambda \int_0^t V_s ds + \alpha\mathbb{E}(M_t) + \beta \int_0^t \mathbb{E}(V_s)ds + W_t$$

Analyse mathématique

- Questions mathématiques ?
  - Notion de solutions ? Existence ? Unicité ? (Stabilité ?)
  - Formulation analytique ? (Caceres, Carrillo, Perthame...)
  - Justification du passage à la limite ?
  - Comportement en temps long...
- Difficulté principle ?
  - $\alpha > 0 \rightsquigarrow$ possibilité d'emballement ?
  - en revanche, influence de β très bien comprise $\rightsquigarrow \beta = 0$ (cours de Sznitman)

Modèle simplifié

- Simplification de l'interaction

$$V_t = V_0 - \lambda \int_0^t V_s ds + \alpha \mathbb{E}(M_t) + W_t$$

  - seuil $V_F = 1$; potentiel de repos $V_R = 0$
- Classe de solutions ?
  - régularité requise pour $\mathbb{E}(M_t)$?

    $\mathbb{E}(M_{t+h} - M_t)$

    $\sim$ probabilité de décharge dans $[t, t+h]$

    $\sim$ proportion de neurones ayant tiré dans $[t, t+h]$
  - régularité $\mathbb{E}(M_t) \leftrightarrow$ décharge de paquets de neurones
- Plus simple de commencer à analyser le cas régulier

Taux de décharge instantané

- Si $e : t \mapsto \mathbb{E}(M_t)$ est différentiable

$$\text{probabilité de décharge dans } [t, t+h] \sim e'(t)h$$

- Dynamique de V (avant décharge) si différentiabilité

$$dV_t = -\lambda V_t dt + \alpha e'(t) dt + dW_t$$

  - EDS $\rightsquigarrow$ calcul stochastique et effet régularisant
  - $\mathbb{P}(V_t \in dy) = p(t,y)dy, \quad t > 0, \quad y < 1$

- Equation de Fokker Planck

$$\partial_t p(t,y) + \partial_y \big[\big(-\lambda y + \alpha e'(t) \big) p(t,y) \big] - \frac{1}{2} \partial^2_{yy} p(t,y) = e'(t) \delta_0$$

  - $p(t,1) = 0$ et $\partial_y p(t,1) = -\frac{1}{2} e'(t)$
  - contrôle de e' $\leftrightarrow$ contrôle de la masse près de 1

Solvabilité du modèle régulier

- Question ? Est-il possible de trouver des solutions régulières en temps arbitrairement long ?

   ◦ Autrement dit $\rightsquigarrow$ est-il possible d'éviter explosion de e' en temps fini ? Ou encore une accumulation de masse en temps fini près de 1 ?

- Caceres, Carrillo, Perthame

   ◦ pour tout $\alpha > 0$, $\exists V_0 < 1$ tel que explosion en temps fini !

- Réciproque

   ◦ étant donné V_0, $\exists ?\ \alpha > 0$ tel que solution en temps long ?

   ◦ réponse $\rightsquigarrow$ oui (papier avec Inglis, Rubenthaler et Tanré)

   ◦ borne explicite (mais non-optimale) sur α

Principe de la démonstration

- Schéma typique des modèles non-linéaires
  - Existence et unicité en temps court
  - Estimations a priori de $\|e'\|_\infty$ (absence d'explosion)
  - Itération de l'argument en temps court
- Existence et unicité en temps court
  - si $\mathbb{P}(V_0 \in dy) \leq \beta(1-y)dy$ pour $y \in (1-\varepsilon, 1)$

    $\Rightarrow$ alors existence et unicité sur $[0, T(\alpha, \beta, \varepsilon)]$
  - méthode de type point fixe de Picard

$$e \in \mathcal{C}^1([0,T]) \mapsto \left(\Gamma(e)(t) = \mathbb{E}\left(\sum_{s \leq t} \mathbf{1}_{\{V_{s-}=1\}}\right)\right)_{0 \leq t \leq T}$$

  - $[d/dt](\Gamma(e)) \rightsquigarrow$ densité de $V \rightsquigarrow$ dév. en $\Sigma/\int$ noyaux gaussiens

Estimation a priori du taux de décharge

- Estimation de e' $\leftrightarrow$ estimation de la masse au bord
  - On suppose $\exists$ solution avec $e \in \mathcal{C}^1$ sur $[0, T]$

    (i) borne de $p(t, y) = \frac{1}{dy}\mathbb{P}(V_t \in dy)$

    (ii) régularité $\frac{1}{2}$ Hölder de e

    (iii) régularité Hölder $p(t, y)$ en y

    (iv) régularité Lipschitz $p(t, y)$ en y
- Estimation L^∞ de $p(t, y)$
  - Majoration très brutale par comparaison avec un noyau gaussien (sans prise en compte des sauts)

$$V_0 < 1 - \varepsilon \Rightarrow p(t, y) \leq C(\varepsilon, \alpha), \quad y \in (1 - \varepsilon/4, 1)$$

  - majoration explicite de $C(\varepsilon, \alpha)$

Continuité de e

- Compréhension des sauts de e ?

  ∘ si $\exists \delta \in (0,1)$ tel que $\int_{1-\delta}^{1} p(t,y)dy < \delta/\alpha$,

  $\Rightarrow$ alors $e(t) - e(t-) \leq \delta$

  $\Leftrightarrow$ si proportion δ de neurones sautent

  $\Rightarrow$ alors excitation $< \delta$

  ∘ si $p(t,y) < 1/\alpha$ pour $y \in (1-\varepsilon, 1)$ alors $e(t) = e(t-)$

- Application

  ∘ Si $C(\varepsilon, \alpha)\alpha < 1$ alors continuité de e

  ∘ Cela donne la condition α petit !

  ∘ En fait, la continuité est dictée par celle du Brownien : e $\frac{1}{2}$-Hölder

Régularité de p près du bord

- Rappel : condition de Dirichlet $p(t, 1) = 0$

  ◦ p vérifie Fokker-Planck : représentation Feynman-Kac

$$p(T, y) = \mathbb{E}\Big[p(T - \rho, Y_\rho) \exp\Big(-\lambda\rho\Big)\Big| Y_0 = y\Big],$$

en terme d'un processus de diffusion sous-jacent

$$dY_t = \lambda Y_t dt - \alpha e'(T - t)dt + dW_t$$

où ρ désigne le premier temps de sortie d'un petit cylindre

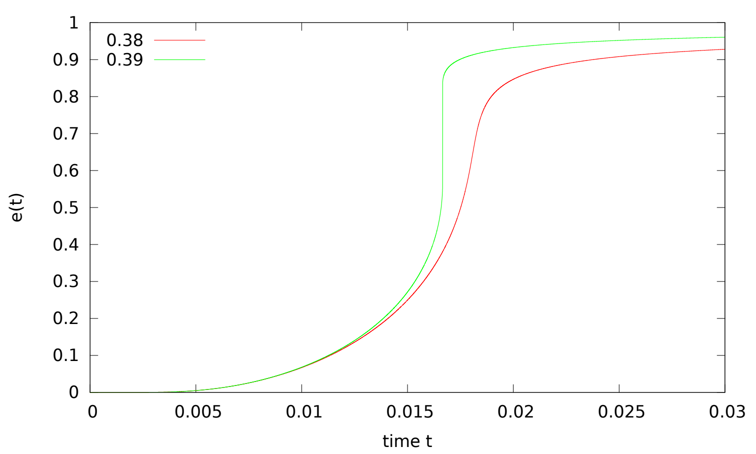
◦ régularité de p au bord $\leftrightarrow$ probabilité que le processus de représentation touche le bord en partant de l'intérieur

◦ probabilité de toucher le bord dictée par compétition entre le mouvement brownien et e : e $\frac{1}{2}$ Hölder $\Rightarrow$ le brownien gagne avec probabilité >0

Fin de la preuve

- Régularité Lipschitz de p près du bord
  - méthode de comparaison : lemme de barrière
- Conclusion $p(t, y) \leq \Gamma_T(1 - y)$, pour $T > 0$ et $y \sim 1$
  - itération du résultat en temps petit
- Exemple brownien $\lambda = 0$ et $x_0 = .8$
  - borne inf pour valeur critique de $\alpha \geq$0.10
  - borne sup valeur critique de $\alpha \leq 0.54$ (par résultat de Carrillo, Carceres et Perthame)
  - estimation valeur critique de $\alpha \sim 0.38\ldots$ (par simulation particulaire)
- Exemple O-U $\lambda \to \infty \Rightarrow \alpha$ critique $\to 1$ ($\Leftrightarrow \lambda$ fixé et $\sigma \to 0$)

Illustration



Convergence vers l'équation limite

- Problématique générale

  ○ convergence vers l'équation limite du système de particules ?

  ○ mais également convergence vers l'équation limite d'un système avec retard ?

- Difficulté principale : singularité du compteur moyen de sauts

  ○ nécessité d'un critère de compacité ad hoc

  ○ nécessité d'une forme de continuité ad hoc

- Topologie : le compteur de sauts est une fonction croissante

  ○ topologie sur les fonctions croissantes (bornées) $\leftrightarrow$ topologie faible sur les mesures ≥ 0 (bornées)

  ○ convergence de probabilités $\leftrightarrow$ convergence des fonctions de répartition en tout point de continuité de la fonction limite

Convergence du système de particules

- Compacité du compteur moyen de sauts $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\sum_{s\le t}\mathbf{1}_{\{V^j_{s-}=1\}}$

  ◦ avec gde probabilité, dans un compact des fonctions $\uparrow$

  ◦ compacité de la distribution des mesures empiriques (sur espace des trajectoires càd-làg avec M1 Skorohod)

$$\mathrm{Loi}\left(\bar{\mu}^N = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_{V^j}\right) \to \mathrm{Loi}(\mu) \quad \text{(à ss-suite près)}$$

- Continuité du compteur moyen de sauts : compteur sous $\bar{\mu}^N$ $\to$ compteur sous μ (sauts $\leftrightarrow$ 'traversées' du seuil)

  ◦ si ! pour équation limite, μ est la Dirac le long de la solution de l'équation limite

Systèmes avec retard

- Autre forme d'approximation

  ◦ $e(t) = \mathbb{E}(M_t)$ remplacé par $e(t) = \mathbb{E}(M_{t-\eta})$, $\eta > 0$

  ◦ on tue l'interaction singulière entre dynamique et sauts $\rightsquigarrow$ modèle toujours bien posé

  ◦ attention : e est toujours $\mathcal{C}^1$

- Question : retard $\to 0$?

  ◦ même topologie : construction d'une solution pour $\eta = 0$

  ◦ attention : potentiellement e à la limite est discontinu

- Unicité ?

  ◦ compréhension des sauts ?

$$e(t) - e(t-) \geq \delta_0 \Leftrightarrow \int_{1-\delta}^{1} p(t-, y)dy \geq \delta/\alpha \quad \text{pour } \delta \leq \delta_0$$

Perspectives

- Solutions avec sauts ?
  - système après le saut ?
  - $e(t) - e(t-) = \delta_0 \Rightarrow p(t, y) = p(t-, y - \delta_0)$ pour y près de 1 (et α raisonnable)
  - effet régularisant et estimation Lipschitz de e en temps > 0 après le saut ?
- Long terme ?
  - asymptotique du système régulier ?
  - asymptotique du système avec sauts de e ?
  - synchronisation : influence des sauts de e ? petit bruit (avec ou sans sauts) ?