

MÉMOIRE

Présenté par

Didier CLAMOND

Pour obtenir le titre de

Habilitation à Diriger des Recherches
de l'Université de Provence – Aix-Marseille I

Spécialité : Mécanique – Énergétique

Contribution à la modélisation des ondes de gravité en profondeur arbitraire

Soutenue le 7 Octobre 2005

Composition du jury :

Mr	A.	CHIKHAOUI	Président
Mr	F.	DIAS	Rapporteur
Mr	C. C.	MEI	Rapporteur (non-présent)
Mr	A.	VERGA	Rapporteur
Mr	Ph.	FRAUNIÉ	Examineur
Mr	J.	GRUE	Examineur

à mon père

Avant propos

Que tous ceux qui m'ont entouré dans mes recherches et durant la rédaction de ce mémoire veuillent bien trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Celle-ci, je l'adresse en premier à Monsieur le Professeur JEAN PIERRE GERMAIN qui m'initiat à la recherche, ainsi qu'à Monsieur le Professeur JOHN GRUE qui m'a accueilli dans son équipe et qui m'a fait l'honneur de participer au jury.

Messieurs les Professeurs FRÉDÉRIC DIAS, CHIANG C. MEI et ALBERTO VERGA ont accepté la lourde et fastidieuse tâche d'être rapporteurs de ce mémoire. Qu'ils soient assurés de toute ma gratitude.

*Je tiens à remercier Messieurs les Professeurs AZIZ CHIKHAOUI et PHILIPPE FRAU-
NIÉ qui m'ont fait l'honneur de participer au jury.*

Je remercie aussi chaleureusement Monsieur le Professeur CHRISTIAN KHARIF sans qui mon projet de présenté l'Habilitation à Diriger des Recherches n'aurait probablement pas aboutit.

Je ne peux oublier de remercier MAGALI LEBOMIN pour ses relectures du mémoire, et tous ceux qui m'ont témoigné affection et amitié durant ces années.

Enfin, je remercie tendrement ma compagne, ELISABET GJERNES, qui m'a supporté durant la rédaction du mémoire et la préparation de la soutenance.

“Souvent par contre l’intelligence n’accepte pas de faire à l’instinct sa part. Dominatrice absolue de la spéculation, elle refuse de partager l’empire de l’action et prétend s’imposer seule.

C’est alors que, méconnaissant le caractère de l’action de guerre, l’intelligence tente de lui appliquer une législation fixe et, par là même, arbitraire. Travaillant dans le solide, elle veut déduire la conception de constantes connues à l’avance, alors qu’il faut, dans chaque cas particulier, l’induire de faits contingents et variables.

Une pareille tendance, il faut le noter, exerce une attraction singulière sur l’esprit français. Curieux et compréhensif, il a besoin de logique, aime enchaîner les faits par des raisonnements, se fie à la théorie plus volontiers qu’à l’expérience.

Ces dispositions naturelles, accusées par ce que l’ordre militaire a, nécessairement, d’impérieux et renforcées par le dogmatisme inhérent à l’enseignement, font fleurir, chez nous plus qu’ailleurs, les “doctrines d’écoles”, que leur caractère spéculatif et absolu rend à la fois séduisantes et périlleuses et qui nous ont coûté si cher.”

Général de Gaulle 1932, *Le fil de l’épée*

“Le but de l’éducation n’est pas le savoir mais l’action.”

Spencer

“L’imagination est plus importante que la connaissance.”

Albert Einstein

Préface

Je présente ici un bref résumé de mes travaux de recherches, ainsi que quelques pistes pour leurs continuations. L'exposé des matériaux ne suit pas un ordre chronologique, mais ceux-ci sont regroupés par thèmes. Le dénominateur commun à ces recherches est l'affranchissement des limitations liées à la profondeur d'eau relative, limitations qui restreignent considérablement l'utilité des modèles classiques. Cela justifie le titre de ce mémoire.

Mes travaux sur les écoulements visqueux et la dissolution de cristaux sous contraintes ne constituant pas ma principale activité de recherche, ils ne sont pas décrits dans ce résumé. Enfin, ma recherche effectuée chez *Clavis Impulse Technology* étant couverte par le secret industriel, je ne peux en faire état ici.

Preface

I present here a brief résumé of my research work, as well as some ideas for their continuation. The materials are grouped by themes and do not follow a chronological order. The common denominator in my researches is the derivation of models (numerical and analytical) that are independent of the water depth. Doing so, the efficiencies of the models are greatly enhanced.

Though this report is written in French, some of my papers in English are included in the appendix. These papers are listed first in the bibliography.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Modélisation numérique	5
2.1	Génèse	5
2.2	Status	6
2.3	Équations du problème	7
2.4	Principe de la méthode	9
2.5	Génération	10
2.6	Absorption	11
2.7	Validation	12
2.8	Expériences numériques	12
2.8.1	Vagues scélérates	12
2.8.2	Instabilités tridimensionnelles	13
2.9	Conclusion	14
3	Modélisation analytique	15
3.1	Introduction	15
3.2	Intérêt des modèles simplifiés	16
3.3	Méthode de perturbations	17
3.3.1	Théorie des ondes courtes	17
3.3.2	Théorie de l'eau peu profonde	17
3.3.3	Théorie unifiée	18
3.3.4	Résultats	18
3.4	Méthode de renormalisation	19
3.4.1	Principe de la méthode	19
3.4.2	Houle cnoïdale renormalisée	20
3.4.3	Renormalisation d'autres approximations	21
3.5	Sommaire et perspectives	21
4	Modélisation semi-empirique	23
4.1	Position du problème	23
4.2	Wheeler's stretching	24
4.3	Nouvelle méthode	24

4.4	Résultats	27
4.5	Prolongements	27
5	Futures études et développements	29
5.1	Vagues d'étrave et de sillage	30
5.2	Houles complexes	31
5.3	Génération de tsunamis	31
5.4	Interaction houle-structure	32
5.5	Autres investigations	33
6	Conclusion	35

Chapitre 1

Introduction

“Le phénomène passe. Je cherche les lois.”
Isidore Ducasse, *Poésies* 1870

“... sans la Science l’homme ne serait qu’un stupide animal sottement occupé à s’adonner aux vains plaisirs de l’amour dans les folles prairies de l’insouciance, alors que la Science, et la Science seule, a pu, patiemment, au fil des siècles, lui apporter l’horloge pointeuse et le parcimètre automatique sans lesquels il n’est pas de bonheur terrestre possible.”

Pierre Desproges, *Vivons heureux en attendant la mort*

Bien qu’étudiée depuis plus de deux siècles, la physique des ondes de gravité (vagues) est loin d’être pleinement comprise. De nouveaux phénomènes sont régulièrement découverts. Par exemple, l’observation en 1995 sur une plateforme pétrolière norvégienne d’une vague géante inattendue (dite *freak wave* ou *rogue wave* en anglais et malheureusement traduite en français par “vague scélérate”) a suscité de nombreuses recherches ces dernières années. D’autres phénomènes importants en génie côtier, en génie marin et en océanographie restent à expliquer, voire à découvrir. Récemment, le tsunami de 26 décembre 2004 dans l’océan indien a révélé l’impact désastreux que peuvent avoir les vagues sur l’Homme et son environnement. Il est apparu alors que la prédiction rapide et précise de tsunamis éventuels est d’une importance cruciale. Cela a relancé la recherche sur ce sujet. On voit donc, par les quelques exemples qui viennent d’être mentionnés, que l’amélioration des modèles existants et le développement de nouveaux outils trouveront des applications pratiques de première importance.

Le système d'équations gouvernant les ondes de gravité est bien établi depuis les travaux de d'Alembert, Euler, Bernoulli et Lagrange au 18^{ième} siècle (Craig 2004 ; Darrigol 2003). Toutefois, sa solution analytique est à ce jour inconnue et il est d'ailleurs fort probable que ce système ne soit pas intégrable. Même sa résolution numérique est d'une grande complexité, du fait de sa très grande "raideur" numérique. Ainsi, scientifiques et ingénieurs se sont contentés de modèles mathématiques simplifiés, e.g., théories d'Airy, de Stokes, de Boussinesq, de Zakharov, etc. De même, nombre de modèles numériques utilisés aujourd'hui repose sur ce genre d'approximations (quoique souvent poussées à des ordres plus élevés).

Les modèles analytiques classiques (simplifiés) se heurtent à deux types de limitations. Premièrement, ils ne s'appliquent qu'aux houles de faibles cambrures. Deuxièmement, ils ne sont valides que sur une plage limitée du rapport *longueur d'onde / profondeur d'eau*. En fait, on peut les grouper en deux familles : les modèles du type "ondes courtes" valides en grande profondeur (e.g. houles d'Airy et de Stokes, équation de Schrödinger non linéaire) et ceux du type "ondes longues" valides en eau peu profonde (e.g. houle cnoïdale, équations de Boussinesq et de Korteweg–deVries). Les domaines de validité de ces deux familles ne se recouvrant pas, le choix d'un modèle dépend du problème étudié. Il se trouve que certaines situations font intervenir à la fois des ondes courtes et longues. Aucune de ces théories ne peut alors s'appliquer. Ainsi, il est souhaitable d'introduire de nouveaux modèles qui, tout en restant simples, permettent de s'affranchir des restrictions liées à la profondeur d'eau relative.

Les modèles numériques basés sur des équations simplifiées présentent évidemment les mêmes limitations que les modèles analytiques correspondants. Dès lors, plusieurs schémas ont été proposés pour la résolution numérique des équations complètes. Ils peuvent être regroupé en trois catégories.

Premièrement, les schémas basés sur des développements en séries autour de la position de la surface au repos (e.g., Craig & Sulem 1993 ; Dommermuth & Yue 1985, West *et al.* 1985) sont rapides mais très instables et peu précis aux fortes cambrures. Ils sont de plus peu efficaces en eau peu profonde et pour la simulation sur de longues périodes de temps en eau profonde, car les non linéarités jouent alors un rôle prépondérant (requérant la troncature des séries à un ordre élevé).

Deuxièmement, les schémas reposants sur des formulations intégrales aux frontières (e.g., Dold 1992 ; Xue *et al.* 2001) sont précis aux fortes cambrures (ils peuvent même décrire le déferlement), mais sont extrêmement lents. De plus, ces schémas requérant un grand nombre d'opérations numériques, ils sont prompt à l'accumulation d'erreurs d'arrondis, érodant ainsi leur précision et leur stabilité. On ne peut donc pas les utiliser pour simuler (en un temps raisonnable) l'évolution sur de nombreuses périodes.

Troisièmement, les schémas qui résolvent l'équation de Laplace par décomposition sur une base de fonctions propres (e.g., Fenton & Rienecker 1982) sont lents (quoique plus rapide que les schéma de la seconde catégorie) et instables aux fortes cambrures.

En fait, tous ces schémas, bien qu’analytiquement équivalents, ne sont numériquement équivalents que si la surface libre est horizontale. On voit donc qu’aucun de ces modèles n’est satisfaisant pour la simulation directe de grands domaines ou sur de longues périodes de temps, comme cela est requis pour l’étude de nombreux problèmes. Il convient aussi d’insister sur le fait que tous ces modèles, à l’exception des équations de Zakharov (1968), sont numériquement instables et requièrent diverses méthodes de stabilisation (lissage, remaillage, viscosité artificielle, etc.). Ils ne conservent donc pas l’énergie (et autres invariants), et leur pertinence pour de longues simulations est sujette à caution (en supposant les simulations puissent être effectuées à l’aide de super ordinateurs).

Étudiant de licence et maîtrise de mécanique de l’université Joseph Fourier (Grenoble I) puis de l’École Nationale Supérieure d’Hydraulique et de Mécanique de Grenoble, j’étais intrigué par cette dichotomie eau-peu-profonde/eau-profonde (ou ondes-longues/ondes-courtes), que rien de mathématique ne justifiait *a priori*. Par la suite, mes recherches sur les houles se sont axées sur le développement de modèles analytiques et numériques valides quelque soit la profondeur d’eau. Outre l’accroît de généralité, j’étais convaincu que l’affranchissant des restrictions liées à la profondeur relative devait aussi améliorer la description des vagues fortement cambrées.

La modélisation des houles indépendamment de la profondeur d’eau relative étant le dénominateur commun de mes recherches, j’ai mis cet aspect en valeur dans ce mémoire. Le chapitre 2 décrit une méthode numérique pour la simulation directe, rapide, précise et stable des ondes de gravité tridimensionnelles surfaciques. Le schéma permet de simuler les vagues cambrées jusqu’au déferlement. Quelques applications du modèle sont présentées dans ce chapitre.

Mes travaux sur les modèles analytiques sont détaillés dans le chapitre 3. Ceux-ci incluent mon travail de thèse et la recherche qu’il a engendrée. Ils furent motivés par la nécessité d’introduire un formalisme unique pour toutes les vagues quelque soit leur longueur d’onde relative.

Au chapitre 4, un modèle “empirique” est présenté. Basé sur une extrapolation de la théorie de Stokes au troisième ordre, il permet simplement et correctement de prédire les champs de vitesse et d’accélération générés par des vagues extrêmes, ce qui a des applications pratiques en ingénierie.

Le mémoire se termine par la présentation au chapitre 5 de mes projets d’études futures qui fourniront, entre autre, matière à plusieurs thèses.

Chapitre 2

Modélisation numérique

“Thus computing is, or at least should be, intimately bound up with both the source of the problem and the use that is going to be made of the answers — it is not a step to be taken in isolation from reality.”

Richard W. Hamming 1987, *Numerical methods for scientists and engineers*

“Un expert est quelqu’un qui connaît quelques unes des pires erreurs qui peuvent être faites dans son sujet, et comment les éviter.”

Werner Heisenberg 1971, *Physics and beyond*

On trouvera ici une description rapide de mon travail sur le développement d’un modèle numérique pour la simulation directe des ondes de surface bi- et tri-dimensionnelles, ainsi que quelques études numériques.

2.1 Génèse

Cette recherche a été menée au département de mathématique de l’université d’Oslo où, sous la direction de John Grue, j’ai effectué un séjour post-doctoral de novembre 1998 à avril 2004. Durant cette période, je me suis initié aux méthodes numériques et j’ai imaginé le modèle ici décrit. Je l’ai implémenté en deux dimensions et en langage MATLAB, ce qui est le plus efficace en phase de recherche-développement. La méthode est décrite en détails dans l’article [1] joint au mémoire et a été présentée dans diverses conférences [11, 12].

Par la suite, j'ai co-encadré un étudiant de thèse, Dorian Fructus, qui a implémenté le schéma tri-dimensionnel en FORTRAN 95 pour tirer avantage de la rapidité et de la parallélisabilité intrinsèques du modèle. J'ai co-encadré un autre thésard, Øyvind Kristiansen, qui a étendu le programme en profondeur finie. On trouvera dans l'article [2] joint ainsi que dans les *proceedings* [13, 14] tous les détails relatifs à la méthode tri-dimensionnelle.

Pour utiliser le modèle dans des configurations non périodiques, j'ai imaginé une nouvelle méthode pour l'absorption des vagues sortantes du domaine de calcul. Ce travail est détaillé dans l'article [3] et dans le *proceeding* [14].

Dans le cours de cette recherche, nous avons engagé une collaboration avec Christian Kharif de l'Institut de Recherche des Phénomènes Hors Équilibre de Marseille. J'ai effectué un séjour d'un mois en février 2002 à l'IRPHE et Dorian Fructus un séjour de trois mois à l'automne 2003. Marc Francius, alors thésard de C. Kharif, a passé un mois à Oslo en novembre 2002. Nous avons utilisé le modèle pour étudier les *freak waves* et les instabilités de houles de Stokes; ces travaux sont présentés plus bas et détaillés dans les références [4, 5, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23]. Nous envisageons de poursuivre cette collaboration.

2.2 Status

Les modèles numériques pour la simulation des ondes de gravité sont basés ou bien sur des équations approchées (équations de Boussinesq, de Schrödinger, etc.), ou bien ils résolvent les équations complètes. Les premiers ont des domaines de validité très limités. Les seconds sont généralement instables ou très lents, souvent les deux.

Une difficulté majeure de l'étude des vagues est qu'une des frontières du domaine (la surface libre) a une forme compliquée et inconnue. Pour s'affranchir de cette difficulté, certains schémas numériques ramènent les conditions sur la surface libre à un niveau horizontal de référence par le biais de développements en séries de Taylor (Craig & Sulem 1993; Dommermuth & Yue 1987; West *et al.* 1987; Zakharov 1968). Les termes non linéaires apparaissent alors comme produits de convolutions. Ils se calculent donc très rapidement par transformée de Fourier rapide (TFR), c'est à dire en $O(N \log N)$ opérations (N étant le nombre de points de collocation). Toutefois, ces séries font intervenir des dérivées d'ordres élevés qui rendent les modèles numériquement instables. Aux fortes cambrures, les séries sont mêmes divergentes. Aux cambrures intermédiaires, bien que les séries analytiques convergent, leur calcul numérique peut diverger due à l'accumulation des erreurs d'arrondis (i.e., la formulation est mal conditionnée). Quand elles convergent, ces séries numériquement peuvent converger vers une limite incorrecte (par effet de saturation); un exemple est donné par Clamond *et al.* [4]. On voit donc que ces méthodes sont inefficaces pour décrire des ondes cambrées ou pour les simulations sur de longues périodes de temps.

Les équations (complètes) des ondes de gravité peuvent être écrites en terme de formulation intégrale aux frontières à l'aide des fonctions de Green (voir ci-dessous). La résolution numérique de ces formulations est précise aux fortes cambrures. Toutefois, les schémas numériques classiques (Dold 1992; Grilli *et al.* 2001; Xue *et al.* 2001) nécessitent l'inversion de systèmes linéaires (matrices pleines) et requièrent ainsi au moins $O(N^2)$ opérations;

ils sont par conséquent très lents. De plus, le grand nombre d'opérations numériques entraînant une accumulation importante des erreurs d'arrondis, ces modèles ne sont pas efficaces pour les simulations sur de longues périodes de temps (à supposer que l'on dispose d'un ordinateur assez puissant pour cela).

Enfin, on notera les schémas basés sur une décomposition en fonctions propres (Ducrozet *et al.* 2005; Fenton & Rienecker 1982). Ces méthodes souffrent des mêmes limitations que celles du premier groupe : les séries numériques sont mal conditionnées et génèrent des instabilités numériques limitant fortement leur utilité pratique pour des problèmes non triviaux. De plus, ces méthodes se généralisent difficilement aux cas des géométries compliquées (fond variable, par exemple).

Pour plus d'information sur ces modèles, on pourra se référer à Fenton (1999).

L'étude de phénomènes fortement non linéaires, tels les *freak waves*, requiert des simulations précises qui ne peuvent s'effectuer (de façon réaliste) à l'aide de modèles simplifiés. De plus, il est souvent nécessaire de modéliser de grands domaines physiques sur de longues périodes de temps. Ce genre de simulations n'est possible qu'à l'aide d'un schéma numérique à la fois précis, rapide, robuste et conservant au mieux les invariants (e.g., l'énergie) des équations continues. Aucun des modèles numériques existants ne remplissant ces conditions, un nouveau schéma a été développé.

Le nouveau modèle développé à l'université d'Oslo est un "hybride" entre les deux premiers types précédents et possède leurs qualités respectives sans leurs inconvénients. Son principe est brièvement décrit dans ce chapitre.

2.3 Équations du problème

On présente ici, pour illustration, les équations régissant l'évolution des ondes de gravité de surface en écoulement potentiel et en grande profondeur. Des généralisations incluant un fond (horizontal ou variable), la tension superficielle et une stratification en bicouche sont décrites par Clamond et Grue [1], Grue (2002) et Fructus *et al.* [2].

On dénote avec des flèches les vecteurs tridimensionnels et en caractères gras les vecteurs bidimensionnels horizontaux. Ainsi, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ représente les variables cartésiennes horizontales, y celle vertical ascendante et t le temps. Le domaine fluide est infini dans la direction horizontale et s'étend verticalement sur $\eta \geq y \geq -\infty$, $y = 0$ et $y = \eta(\mathbf{x}, t)$ étant les équations du niveau moyen et de la surface libre. Soit $\vec{v} = (\mathbf{u}, v)$ le champ de vitesse, où $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ et v sont les vitesses horizontales et verticale. L'écoulement étant considéré potentiel, on introduit $\vec{v} = \text{grad } \phi$, $\mathbf{u} = \nabla \phi$ et $v = \phi_y$; ϕ étant le potentiel des vitesses et ∇ le gradient horizontal. On dénotera avec des 'tildes' les quantités à la surface, e.g., $\tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, y = \eta(\mathbf{x}, t), t)$. Notons que

$$\tilde{\mathbf{u}} = \widetilde{\nabla \phi} \neq \nabla \tilde{\phi} = \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{v} \nabla \eta, \quad (2.1)$$

et que

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{\nabla\tilde{\phi} - V\nabla\eta + (\nabla\eta \wedge \nabla\tilde{\phi}) \wedge \nabla\eta}{1 + \|\nabla\eta\|^2}, \quad (2.2)$$

$$\tilde{v} = \frac{V + \nabla\eta \cdot \nabla\tilde{\phi}}{1 + \|\nabla\eta\|^2}, \quad (2.3)$$

où

$$\begin{aligned} V &\equiv (\vec{\mathbf{N}} \cdot \text{grad } \phi) \sqrt{1 + \|\nabla\eta\|^2} \\ &= \tilde{v} - \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla\eta, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$\vec{\mathbf{N}}$ étant la normale unitaire extérieure à la surface :

$$\vec{\mathbf{N}} \equiv (-\nabla\eta, 1) / \sqrt{1 + \|\nabla\eta\|^2}. \quad (2.5)$$

À la surface, la pression massique p est soit nulle, soit égale à une pression génératrice \tilde{p}_G (i.e. un batteur pneumatique qui reste à définir, voir §2.5) plus une pression dissipative \tilde{p}_D (i.e. un absorbeur d'ondes à définir). À l'aide de ces notations, l'imperméabilité et l'isobarité de la surface peuvent s'écrire

$$\eta_t - V = 0, \quad (2.6)$$

$$\tilde{\phi}_t + g\eta + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla\tilde{\phi} - \frac{1}{2}\tilde{v}V = -\tilde{p}_G - \tilde{p}_D, \quad (2.7)$$

g étant l'accélération de gravité. Nous avons ainsi une équation pour la surface et une pour le potentiel. Il en manque donc encore une pour fermer le problème, c'est à dire une équation définissant V .

L'équation de Laplace résultante de l'incompressibilité du fluide et l'irrotationalité du mouvement, avec la condition de repos quand $y \rightarrow -\infty$, est résolue exactement à l'aide d'une fonction de Green :

$$\int_S \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial\tilde{\phi}'}{\partial n'} dS' = 2\pi\tilde{\phi} + \int_S \tilde{\phi}' \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{\tilde{r}} dS', \quad (2.8)$$

où $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t)$, $\tilde{\phi}' = \tilde{\phi}(\mathbf{x}', t)$, $r^2 = R^2 + (y' - y)^2$, avec $R = \|\mathbf{R}\|$ et $\mathbf{R} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$. Pour les vagues non-déferlantes

$$dS' = \sqrt{1 + \|\nabla'\eta'\|^2} dx'_1 dx'_2,$$

et on obtient

$$\int \frac{V'}{(1 + D^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d\mathbf{x}'}{R} = 2\pi\tilde{\phi} + \int \frac{\tilde{\phi}'(\mathbf{R} \cdot \nabla'\eta' - \eta' + \eta)}{(1 + D^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{d\mathbf{x}'}{R^3}, \quad (2.9)$$

où

$$D \equiv \frac{\eta' - \eta}{R},$$

et avec la notation

$$\int \bullet d\mathbf{x}' \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bullet dx'_1 dx'_2. \quad (2.10)$$

(2.9) est l'équation manquante cherchée.

Notons que $D \sim R^{-1}$ quand $R \rightarrow \infty$, et $D \rightarrow \nabla \eta \cdot \mathbf{R}/R$ quand $R \rightarrow 0$. Notons aussi qu'à l'approximation linéaire — i.e. pour $\eta=0$ — la relation (2.9) devient

$$\tilde{v} \approx V \approx V_1 \equiv \mathfrak{d} \tilde{\phi},$$

avec

$$\mathfrak{d} \equiv (-\nabla \cdot \nabla)^{\frac{1}{2}}.$$

L'opérateur pseudo-différentiel \mathfrak{d} peut être facilement calculé par transformation de Fourier car il agit trivialement sur une exponentielle imaginaire pure :

$$\mathfrak{d} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = \|\mathbf{k}\| \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}).$$

2.4 Principe de la méthode

La tâche la plus intensive du calcul numérique est, de loin, la résolution de l'équation (2.9). Pour résoudre cette dernière de manière rapide et stable, on procède à une expansion partielle des noyaux des intégrales ; par exemple :

$$(1 + D^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}D^2 + K, \quad (2.11)$$

où

$$\begin{aligned} K &= (1 + D^2)^{-\frac{1}{2}} - 1 + \frac{1}{2}D^2 \\ &= \frac{3}{8}D^4 + O(D^6). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ensuite, les nômes en D sont réécrits sous des formes ne faisant intervenir que des produits de convolutions. Par exemple

$$\begin{aligned} \int V' D^2 \frac{d\mathbf{x}'}{R} &= \int V' \frac{(\eta' - \eta)^2}{R^2} \frac{d\mathbf{x}'}{R} \\ &= \int V' \eta'^2 \frac{d\mathbf{x}'}{R^3} - 2\eta \int V' \eta' \frac{d\mathbf{x}'}{R^3} + \eta^2 \int V' \frac{d\mathbf{x}'}{R^3}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

où les trois intégrales de la seconde ligne de (2.13) sont des produits de convolutions bidimensionnelles. De la sorte, tous les termes linéaires, quadratiques et cubiques sont réécrits sous cette forme et se calculent en $O(N \log N)$ opérations par transformées de Fourier rapides.

Les restes des développements demeurent sous formes d'intégrales dans l'équation (2.9). Toutefois, les noyaux de ces dernières décroissant rapidement (K ci-dessus décroît comme R^{-4} , et donc le noyau de l'intégrale correspondante décroît comme R^{-5}) les intégrations

peuvent être tronquées sur une portion réduite du domaine. En pratique, l'intégration sur une longueur d'onde caractéristique est suffisante. De la sorte, le nombre d'opérations est ramené de $O(N^2)$ à $O(N \times M)$ opérations, où $M \ll N$ si la boîte de calcul inclut un grand nombre de longueurs d'ondes caractéristiques. Cette approche est la principale originalité de la méthode, mais ce n'est pas la seule comme nous allons le voir.

Avant cela, on notera qu'il serait tentant de pousser plus loin le développement (2.11) afin d'obtenir des restes qui décroissent plus vite et ainsi accélérer la méthode. En poussant les développements à l'infini, on obtient alors la méthode de Craig et Sulem (1993). Il se trouve que c'est une très mauvaise idée car :

- la série converge pour $|D| < 1$ et il est des situations physiques où $|D|$ approche 1 pour des vagues non déferlantes ;
- la série converge très lentement (quand elle converge) ;
- les problèmes liés aux repliements de spectres (voir ci-après) augmentent avec l'ordre des non linéarités ;
- les convolutions d'ordres élevés font intervenir des dérivées d'ordres supérieurs.

Pour ces raisons, le schéma numérique devient alors peu précis et très instable. La méthode de Craig et Sulem est particulièrement instable pour la simulation d'écoulements fortement tridimensionnels, tels que les *horse shoes* décrits ci-après (Craig 2004, discussion privée).

Pour éviter les instabilités numériques dues aux non linéarités (repliements de spectres), les spectres sont étendus par des zéros aux hautes fréquences (*zeros padding*). Aucune autre méthode de stabilisation n'est utilisée (e.g. remaillage, lissage, viscosité artificielle) contrairement aux autres modèles qui requièrent ce genre d'artifices. C'est là un point crucial et l'un des points forts de la méthode. En effet, le système d'équations étant conservatif (hamiltonien), cette propriété est détruite par lissage, remaillage, etc. Les simulations à long terme n'ont alors plus aucune signification physique lorsque ce genre de techniques est employé.

Pour l'évolution temporelle, on effectue une intégration analytique de la partie linéaire du système, et la partie non linéaire restante est résolue par un schéma de Runge–Kutta explicite du cinquième ordre à pas variables stabilisés. Le schéma temporel est donc (linéairement) inconditionnellement stable et exact.

La méthode est décrite en détails par Clamond et Grue (2001 [1]) dans le cas bidimensionnel et par Fructus *et al.* [2] pour la généralisation en trois dimensions.

2.5 Génération

Pour de nombreuses simulations, il est nécessaire de générer le champ de vagues à partir du repos. Expérimentalement on a généralement recours à un batteur mécanique. Pour un modèle numérique ce mode de génération est mal adapté car il induit des singularités. Nous avons donc choisi de générer les houles à l'aide d'une distribution de pression à la surface,

c'est à dire un batteur pneumatique.

Une distribution de pression \tilde{p}_G à la surface est prescrite, sa forme et son mouvement étant choisis de sorte à générer le champs de vagues désiré. Les paramètres du batteur sont déterminés de manière à transmettre le plus d'énergie possible au champ de houle (Wehausen & Laitone 1960). Cette méthode est très simple et robuste. En particulier, elle n'induit aucune singularité dans l'écoulement ni sur la surface, ce qui est crucial pour la stabilité numérique. Par cette méthode, on peut générer avec succès des houles mono- et multi-chromatiques (incluant les spectres aléatoires), des vagues axisymétriques, des ondes de Rayleigh (vagues engendrées par un bateau), etc. Quelques exemples sont présentés par Clamond *et al.* [3].

2.6 Absorption

La méthode, telle que décrite ci-dessus, requiert l'emploi de transformations de Fourier, ce qui suppose que le domaine de calcul soit périodique. Afin de modéliser un problème non périodique, il est possible d'inclure le domaine physique dans une boîte de calcul plus grande qui, elle, est périodisée. Il faut donc absorber les ondes sortantes aux frontières physiques ouvertes et, de la même façon, empêcher les ondes entrantes. Pour ce faire, une version modifiée de la technique dite de *couche éponge* ou *plage absorbante* (Givoli 1991) a été développée.

L'absorption par couche éponge classique consiste, par analogie avec la loi de Darcy décrivant un écoulement dans un milieu poreux, à introduire une pression de *damping* \tilde{p}_D de la forme

$$\tilde{p}_D = \gamma \phi, \quad (2.14)$$

$\gamma \geq 0$ étant non nul dans les régions où l'absorption est désirée. Toutefois, il est connu que cette méthode n'est pas très efficace et, qui plus est, peut même générer des ondes. L'identification des raisons de cette inefficacité (condition de jauge incorrecte et absorption de quantités non physiques) conduit naturellement à introduire le nouvel absorbeur (Clamond *et al.* [3])

$$\tilde{p}_D = \nabla^{-1} \{ \gamma \nabla \phi \}, \quad (2.15)$$

où l'opérateur pseudo-différentiel ∇^{-1} est l'inverse du gradient horizontal. Par définition

$$\nabla^{-1} = \Delta^{-1} \nabla,$$

Δ étant le laplacien scalaire horizontal, et ∇^{-1} se calcule facilement dans l'espace de Fourier où il devient une simple multiplication car

$$\mathcal{F} \{ \nabla^{-1} \phi \} = \frac{-i \mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|^2} \mathcal{F} \{ \phi \},$$

avec

$$\mathcal{F} \{ \phi \} = \int \phi(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$

On notera que si γ est constant la loi de Darcy est retrouvée. Cette nouvelle variante est rapide, simple à implémenter quelque soit la géométrie de la frontière, et très absorbante pour toutes longueurs d'ondes. En pratique, une plage bien choisie n'émet pas d'onde, n'en réfléchit pas, et n'en transmet pas non plus.

2.7 Validation

On a validé le modèle par diverses comparaisons avec des expériences et d'autres codes numériques. On trouvera les détails de ces tests dans les articles relatifs à la méthode situés en annexe. Le test le plus significatif est probablement la simulation de l'évolution d'une houle progressive exacte.

On introduit dans notre modèle comme condition initiale une houle de Stokes 'exacte' de forte cambrure ($ak \approx 0.3$) obtenue à l'aide du programme de Fenton (1988). Bien sûr, la précision des résultats dépend des paramètres numériques choisis (discrétisation, tolérance, etc.). Dans la simulation la plus précise, après mille périodes d'évolution de la houle, on observe une erreur relative d'amplitude de l'ordre de 10^{-6} et un déphasage d'environ un tiers de degré, ce qui est très faible. Cela correspond à une erreur sur la période de l'ordre de 10^{-7} , c'est à dire la précision de la condition initiale. Ce test doit être comparé avec les autres modèles qui induisent une erreur de l'ordre d'un degré par période.

On renverse alors le temps et simule à rebours jusqu'à l'instant initial. La condition initiale est recouverte avec une erreur de phase de l'ordre du zero machine (10^{-16}). Plus important, l'erreur relative sur l'énergie oscille autour de 10^{-6} sans tendance ni à croître ni à décroître, ce qui est crucial pour la réversibilité du schéma et la conservation des invariants.

Ce test révèle une grande partie de la qualité du modèle. Il est par ailleurs tout à fait possible que les écarts observés soient dus à l'imprecision de la condition initiale de Fenton et non pas à celle de notre modèle.

2.8 Expériences numériques

Le modèle a été utilisé pour analyser deux phénomènes physiques qui ne peuvent être simulés (du moins pas de manière réaliste) à l'aide d'autres modèles. Je décris ici très succinctement ces deux expériences numériques. On se reportera aux articles correspondants pour plus de détails.

2.8.1 Vagues scélérates

On a étudié l'évolution à long terme d'un paquet d'ondes initialement localisé. Pour cela, on part d'une houle de Stokes exact (Fenton 1988) que l'on modifie en la multipliant par une fonction "cloche" de type sécante hyperbolique. Le train d'ondes initial est choisi plus long qu'un soliton enveloppe, de sorte qu'il soit instable et se doit d'évoluer. C'est cette évolution à laquelle nous nous sommes intéressés.



FIG. 2.1 – Traces en “fer à cheval” sur le sable.

On a simulé l'évolution de ce paquet d'ondes à l'aide de modèles simplifiés de type Schrödinger (Mei 1989; Dysthe 1979), du schéma numérique de Dommermuth et Yue (1985), et le nouveau modèle décrit précédemment. Il ressort que les *freak waves* apparaissent, entre autres, lors d'interactions entre solitons enveloppes (Clamond *et al.* [4]; Clamond & Grue [17]). Le transfert d'énergie aux basses fréquences est aussi un mécanisme fondamental. L'étude comparative des modèles montre de fortes différences, quantitatives et qualitatives. Seul le nouveau schéma est assez précis pour décrire correctement l'évolution à long terme. Cela implique que les études statistiques basées sur les équations de Zakharov (1968) tronquées aux faibles non linéarités, en particulier, ne permettent probablement pas de déduire correctement la probabilité d'occurrence des *freak waves*.

2.8.2 Instabilités tridimensionnelles

Nous avons aussi étudié la stabilité d'une houle de Stokes bidimensionnelle soumise à des perturbations infinitésimales tridimensionnelles. Le modèle reproduit de façon très fidèle les expériences de Su (1982) et de Collard et Caulliez (1999) sur l'apparition de vagues en “fer à cheval”. En complétant ces expériences, la modélisation numérique a permis de comprendre les mécanismes de sélection des différentes classes d'instabilités (Fructus *et al.* [5]; voir aussi [21, 22]).

Une étude complémentaire a aussi été menée pour étudier l'effet d'un fond horizontal. De plus, les interactions entre six et sept vagues ont été simulées pour la première fois et analysées (voir Kristiansen *et al.* [6]; voir aussi [23]).

Il ne faudrait pas croire que ces études n'ont qu'un intérêt académique. En effet, ces formations en fers à cheval peuvent s'observer dans la nature, comme le montre la figure 2.1 où ce type de vague a laissé des traces sur le sable visible à marée basse.

2.9 Conclusion

Nous avons développé un modèle numérique rapide et précis pour la simulation directe des ondes de gravité. Il autorise l'étude de phénomènes qui jusqu'à présent étaient hors de portée des modèles simplifiés soit, au mieux, parce que trop imprécis soit, au pire, parce qu'ils ne 'contiennent' pas la physique en question.

En l'état, le modèle peut être utilisé pour la simulation et l'analyse de nombreux phénomènes. D'autres études requièrent des améliorations qui seront abordées au paragraphe suivant. Quelques projets études et développements sont exposés au chapitre 5.

Chapitre 3

Modélisation analytique

“Est rigoureuse toute démonstration, qui, chez tout lecteur suffisamment instruit et préparé, suscite un état d’évidence qui entraîne l’adhésion.”

René Thom

“Une méthode est un truc qui a été utilisé plusieurs fois.”

George Polya

Cette partie décrit mes recherches sur les modèles analytiques simples. Ils ont été développés pour l’étude de phénomènes physiques particuliers, mais peuvent aussi servir de base à d’autres études.

3.1 Introduction

Cette recherche a commencée en 1989 par mon DEA sous la direction d’Éric Barthélemy au Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels de Grenoble. Durant ma thèse de doctorat, dirigée par Jean Pierre Germain au LEGI de 1992 à 1994, j’ai développé le modèle WKG non linéaire décrit ci-après. Le but de cette recherche était de pouvoir décrire des ondes courtes et longues simultanément. Outre son intérêt théorique, ce travail a des applications pratiques car l’on peut espérer détecter les tsunamis en grandes profondeur par la manière dont ils modifient les vagues. Le raz de marée du 26 décembre 2004 a relancé l’intérêt pour ce genre d’études. Les résultats sont publiés dans [7, 24, 25, 26].

De 1996 à 1998 j'étais en poste d'Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche à l'Institut des sciences de l'Ingénieur de Toulon et du Var. J'en ai profité pour développer la méthode de renormalisation présentée ici. Cette méthode complète l'approche WKG et est décrite en détail dans les publications [8, 9, 27, 28].

3.2 Intérêt des modèles simplifiés

Les modèles numériques, tout comme les expériences, n'ont jamais rien expliqués, ou presque, et ce quelque soit leur précision. En effet, simulations numériques, expériences et observations *in situ* ne produisent 'que' des faits (quelquefois discutables, souvent discutés) mais ne permettent généralement pas une compréhension qualitative des mécanismes physiques mis en jeu.

Ce genre de description (qualitative) requiert un (ou des) modèle(s) mathématique(s) simple(s) décrivant le(s) mécanisme(s) de base(s). Un tel modèle constitue un *paradigme*. Sa simplicité est une condition nécessaire afin que l'esprit humain puisse concevoir ("visualiser") la physique sous-jacente. Les phénomènes plus complexes sont alors interprétés à l'aide de ces mécanismes élémentaires : superposition, interaction, etc.

La pertinence d'un paradigme ne dépend pas tellement de sa précision quantitative, mais plutôt de sa capacité à expliquer qualitativement la physique, i.e., de sa capacité à générer des "images mentales" dans l'esprit du physicien. Quand plusieurs paradigmes s'appliquent à un même phénomène physique, c'est celui qui fournit l'explication la plus "claire" qui est préféré, et ce n'est pas nécessairement celui qui est quantitativement le plus précis (e.g., modèles de Ptolémé et Copernic décrivant le système solaire).

Dans la théorie des ondes de gravité, deux paradigmes s'opposent : *i*- Le concept de *rayon* (optique géométrique) est pertinent pour décrire les ondes quand la profondeur (rapporté à la longueur d'onde caractéristique) est grande ; *ii*- Le concept de *soliton* (aspect "corpusculaire") se prête à la description des ondes se propageant en eau peu profonde. Ces deux interprétations dérivent naturellement des approximations mathématiques employées (et de leur variantes) que sont la théorie des ondes courtes (e.g. houles d'Airy et de Stokes, equation de Schrödinger non linéaire (NLS)), et la théorie des ondes longues (e.g. houles cnoïdales et solitaires, equations de Boussinesq et de Korteweg et de-Vries (KdV)). Il se trouve que ces deux théories ont des domaines de validité disjoints. On utilise généralement la théorie des ondes courtes pour les problèmes au large (structures *off-shore*, océanographie) et la théorie des ondes longues pour les problèmes côtiers (génie portuaire, tsunamis).

La dichotomie entre ondes courtes et longues est purement le résultat des approximations mathématiques employées ; aucune "barrière" physique ne sépare les houles en deux catégories. Une part de ma recherche consiste à unifier les deux théories pré-existantes en un seul formalisme permettant de décrire les vagues quelque soit la profondeur d'eau. Cette unification faisant appel à une mathématique simple, elle fournit un nouveau paradigme permettant d'interpréter différemment certains phénomènes.

Cette recherche a commencé avec ma thèse de doctorat. Je l'ai poursuivie par la suite,

et de nombreuses voies prometteuses restent à explorer.

3.3 Méthode de perturbations

Mon travail de thèse a consisté en l'étude théorique et expérimentale de l'interaction entre une houle de Stokes et une onde solitaire. Parce que ces deux ondes relèvent de deux théories distinctes et incompatibles, j'ai dû en développer une autre plus générale. Bien que l'analyse des résultats porte plus particulièrement sur l'interaction entre un soliton et une onde de Stokes, la théorie décrit l'interaction entre toutes les solutions permanentes de l'équation de Korteweg et de Vries (houles cnoïdales) et celles de l'équation de Schrödinger non linéaire (solitons enveloppes, enveloppes cnoïdales). La théorie générale, tout comme les deux théories classiques, repose sur une méthode de perturbation.

3.3.1 Théorie des ondes courtes

L'approximation des ondes courtes peut s'obtenir à l'aide d'un schéma de perturbation dit du "petit paramètre de Poincaré". Son principe est le suivant.

Les fonctions inconnues, par exemple la position de la surface par rapport au repos η , sont développées en séries entières d'un 'petit' paramètre ϵ de la forme :

$$\eta(x, t) = \epsilon \eta_1(x, t) + \epsilon^2 \eta_2(x, t) + \dots, \quad (3.1)$$

où x est la variable horizontale et t le temps. En injectant ces séries dans les équations, il apparaît que η_n est un polynôme de Fourier d'ordre n , i.e.,

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \epsilon^n A_{n,m} \exp[im(kx - \omega t)], \quad (3.2)$$

k étant le nombre d'onde, ω la pulsation de l'onde et les $A_{n,m}$ des constantes. On retrouve ainsi la "houle de Stokes". Ces solutions décrivent correctement les vagues de faibles cambrures lorsque la profondeur d'eau est relativement grande par rapport à la longueur d'onde. En revanche, la qualité de l'approximation se détériore quand la profondeur d'eau diminue et, en particulier, l'onde solitaire ne peut être décrite. En eau peu profonde, on doit donc avoir recours à une autre méthode d'approximation.

3.3.2 Théorie de l'eau peu profonde

Afin de décrire correctement les houles en eau peu profonde, il faut prendre en compte la grande longueur des vagues vis à vis de la profondeur, et par conséquent les lentes variations temporelles. Pour cela, on introduit de nouvelles variables horizontales et temporelles "distordues" de la forme

$$\xi = \epsilon x, \quad \tau = \epsilon t, \quad (3.3)$$

où ϵ est toujours un petit paramètre, et on développe les inconnues en séries entières

$$\eta(x, t) = \epsilon \eta_1(\xi, \tau) + \epsilon^2 \eta_2(\xi, \tau) + \dots \quad (3.4)$$

Par ce procédé, on obtient des solutions appelées “houles cnoïdales”, car elles s’expriment à l’aide de la fonction elliptique de Jacobi cn . L’onde solitaire est un cas limite quand la longueur de l’onde est infinie. Toutefois, la précision de l’approximation diminue quand la profondeur augmente, et cette théorie ne peut en aucun cas être appliquée directement en profondeur infinie (pour cela on peut avoir recours à la méthode de renormalisation décrite dans la section 3.4).

3.3.3 Théorie unifiée

La description simultanée d’ondes longues et courtes nécessite donc une théorie unifiée. Celle-ci est obtenue en remarquant que l’approximation des ondes courtes (3.2) s’écrit à l’aide des variables distordues (3.3)

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \epsilon^n A_{n,m} \exp [im\epsilon^{-1}(k\xi - \omega\tau)]. \quad (3.5)$$

Cela suggère la série générale

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \epsilon^n A_{n,m}(\xi, \tau) \exp [im\epsilon^{-1}S], \quad (3.6)$$

où

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n S_n(\xi, \tau), \quad (3.7)$$

qui est un développement de type WKB non linéaire. Clairement, si tous les $A_{n,m}$ sont constants et si $S = k\xi - \omega\tau$, la houle de Stokes est obtenue, et si $A_{n,m} = 0$ pour tout $m \neq 0$, on retrouve la théorie de l’eau peu profonde. Le développement (3.6) induit donc une théorie généralisée, par construction.

3.3.4 Résultats

La théorie unifiée, présentée brièvement ci-dessus, a permis d’obtenir (après de lourds calculs) des approximations analytiques explicites décrivant l’interaction entre une houle solitaire et une onde courte lentement modulée. Ces solutions décrivent les mécanismes physiques suivants.

Sous l’action du soliton, l’onde courte subit un déphasage proportionnel à la racine carrée de l’amplitude de l’onde solitaire. La porteuse de l’onde courte et son enveloppe subissent des déphasages différents. Ceux-ci sont plus importants si les ondes se propagent dans le même sens (interaction forte) que si elles se propagent en sens opposés (interaction

faible). Lors de son passage sur l'onde solitaire, l'onde courte subit un effet Doppler variable qui peut conduire au déferlement.

Sous l'action de l'onde courte, différentes parties de l'onde solitaire subissent un déphasage différent : le soliton "gondole". Il subit aussi une variation verticale de sa phase. Ainsi, comme c'est souvent le cas en mer, par exemple, si une onde courte de surface interagit avec une onde longue interne (ou un autre évènement interne comme le déplacement d'un sous-marin), la "signature" à la surface n'est pas à la verticale de l'évènement. Les applications en télédétection sont évidentes.

Certaines des prédictions théoriques (déphasage et effet Doppler) ont été vérifiées expérimentalement avec un accord convenable. Ces mesures ont nécessité un dispositif expérimental performant, ainsi que le développement d'un algorithme précis de traitement du signal pour la mesure des déphasages (Clamond & Barthélémy 1995).

Cette recherche est détaillée dans mon rapport de thèse (Clamond 1994), ainsi que dans l'article [7] en découlant.

3.4 Méthode de renormalisation

La théorie générale ci-dessus présente deux inconvénients. Premièrement, les calculs sont d'une grande complexité, et son emploi pour l'étude d'autres phénomènes physiques s'en trouve ainsi limité. Deuxièmement, et c'est là le point le plus important, bien que l'on puisse étudier les houles longues et courtes simultanément, chacune de ces ondes reste décrite par son approximation classique. Des solutions valides quelque soit la profondeur sont souhaitables. Elles peuvent être obtenues en renormalisant les approximations de la théorie de l'eau peu profonde, dont le principe est le suivant.

3.4.1 Principe de la méthode

En écoulement potentiel bi-dimensionnel sur fond horizontal et imperméable, on doit déterminer un potentiel des vitesses $\phi(x, y, t)$ tel que

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad \text{pour} \quad -h \leq y \leq \eta, \quad (3.8)$$

$$\phi_y = 0 \quad \text{sur} \quad y = -h, \quad (3.9)$$

où $y = -h$ est l'équation du fond et $y = \eta(x, t)$ celle de la surface, h étant la profondeur d'eau au repos. La solution la plus générale de ces équation est (Lagrange 1781)

$$\begin{aligned} \phi &= \cos[(y+h) \partial_x] \hat{\phi} \\ &= \hat{\phi} - \frac{1}{2}(y+h)^2 \hat{\phi}_{xx} + \frac{1}{24}(y+h)^4 \hat{\phi}_{xxxx} - \frac{1}{6!}(y+h)^6 \hat{\phi}_{x^6} + \dots, \end{aligned} \quad (3.10)$$

où

$$\hat{\phi}(x, t) = \phi(x, y = -h, t),$$

est le potentiel sur le fond.

Dans la théorie de l'eau peu profonde, la série (3.10) est tronquée après N termes, impliquant que ses approximations ne vérifient pas exactement l'équation de Laplace (3.8), contrairement à la théorie de Stokes. De même, la dérivation des équations de type Schrödinger font appel à des approximations de ϕ qui ne sont pas solutions exactes de l'équation de Laplace. Cela résulte du fait que les schémas de perturbations employés sont singuliers. Pour corriger ce défaut, on note que la solution générale (3.10) peut aussi s'écrire

$$\phi(x, y, t) = \frac{1}{2}\hat{\phi}(x+iy+ih, t) + \frac{1}{2}\hat{\phi}(x-iy-ih, t). \quad (3.11)$$

Ainsi, à partir d'une approximation du potentiel sur le fond $\hat{\phi}$ et en appliquant la formule (3.11), on obtient une nouvelle approximation vérifiant exactement l'équation de Laplace. Par exemple, une solution du potentiel des vitesses de l'onde solitaire est donnée par l'équation de Korteweg et de Vries :

$$\phi \approx \hat{\phi} \approx A \tanh \kappa(x-ct), \quad (3.12)$$

A , κ et c étant des constantes. Cette approximation n'est évidemment pas solution de l'équation de Laplace, mais l'application de la formule (3.11) donne (voir Clamond 1998 et [8])

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{2}A \tanh \kappa(x+iy+ih-ct) + \frac{1}{2}A \tanh \kappa(x-iy-ih-ct) \\ &= \frac{A \tanh \kappa(x-ct)}{1 - \operatorname{sech}^2 \kappa(x-ct) \sin^2 \kappa(y+h)}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

qui, elle, satisfait l'équation de Laplace. Le gain, quant à la précision et au domaine de validité, est énorme.

3.4.2 Houle cnoïdale renormalisée

Par ce procédé, la renormalisation de la houle cnoïdale conduit à une approximation valide quelque soit la profondeur finie. Le potentiel complexe $f = \phi + i\psi$ de la houle cnoïdale renormalisée s'écrit

$$f = A \operatorname{zn}(\kappa z | m), \quad z = x - ct + i(y + h), \quad (3.14)$$

où zn est la fonction zéta de Jacobi. Cette approximation est valide quelque soit la profondeur finie. La renormalisation a aussi pour effet d'améliorer la qualité des solutions pour les grandes amplitudes (Clamond 1999 [8]).

Dans la limite de la profondeur infinie, on obtient une solution plus simple et plus précise que la houle de Stokes du cinquième ordre (c.f., [9]). Le potentiel complexe de cette approximation devient

$$f(z) = \frac{iA}{\exp(ikz) - m}, \quad z = x - ct + iy. \quad (3.15)$$

Cette nouvelle approximation (“houle cnoidale en profondeur infinie”) représente une distribution périodique de dipôles, i.e.

$$f = \frac{A}{m} \left[\frac{im}{1-m} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{kz - 2n\pi + i\log(m)} + \frac{1}{2n\pi - i\log(m)} \right]. \quad (3.16)$$

Chaque dipôle engendrant un soliton algébrique, on obtient un nouveau paradigme pour décrire les houles en grandes profondeurs (dualité onde-particule). En effet, cette nouvelle solution montre que l’on peut conceptualiser un champ de vagues complexe (en profondeur arbitraire) comme superposition de solitons interagissants, et non pas uniquement comme superposition de houles sinusoïdales comme il est généralement admis.

3.4.3 Renormalisation d’autres approximations

La renormalisation de solutions d’ordres élevés (e.g. solution d’une équation de KdV modifiée) fournit des solutions encore plus précises (Clamond & Fructus 2003). Cette technique s’applique donc efficacement à tous types de solutions obtenues par des méthodes de perturbations singulières.

3.5 Sommaire et perspectives

Ce travail montre, s’il en était besoin, que des investigations analytiques simplifiées sont d’une grande utilité (voire nécessité) pour décrire qualitativement la physique sous-jacente. Elles permettent aussi d’obtenir des approximations relativement précises. Les résultats décrits ci-dessus découlent du fait que l’on se soit affranchit des restrictions liées à la profondeur d’eau relative. C’est là le point crucial.

Outre que l’on puisse appliquer la méthode de renormalisation à divers types d’approximations (pas seulement aux ondes permanentes) et que l’on puisse analyser ainsi divers problèmes en profondeur arbitraire, de nombreuses pistes de recherche restent à explorer. J’en décris quelques unes au chapitre 5.

La renormalisation généralisée en trois dimensions serait d’une grande utilité pour nombres d’applications. En effet, de nombreux problèmes sont fortement tridimensionnels et ne peuvent être approximés par des solutions bidimensionnelles.

On a vu que les vagues peuvent s’interpréter comme un paquet de solitons interagissants. Ainsi, il devrait être possible de baser un schéma numérique sur ce type de fonctions propres, au lieu des séries de Fourier classiquement utilisées (qui permettent l’emploi de la transformée de Fourier rapide). On obtiendrait alors un modèle numérique ultra rapide et précis pouvant simuler des états de mer complexes sur de grandes échelles d’espace et de temps.

Chapitre 4

Modélisation semi-empirique

“... les mathématiciens qui font de l’abstraction pour l’amour de l’abstraction sont le plus souvent des médiocres.”

Jean Dieudonné 1980, *Calcul infinitésimal*

“Laissons aux abstrauteurs de quintessence l’idée néfaste que la Science est belle en raison de son inutilité, et le réconfort de croire que leurs découvertes serviront dans deux cents ans.”

Henri Bouasse

Ce chapitre décrit mes recherches sur le développement d’un modèle empirique décrivant simplement et précisément la cinématique et la dynamique d’un champs de vagues de grandes amplitudes en eau profonde. Cette recherche a été conduite au département de mathématique de l’université d’Oslo. J’ai collaboré avec Atle Jensen et Morton Huseby, alors étudiants en thèse de John Grue.

4.1 Position du problème

Pour la conception de structures *off-shore*, par exemple, les ingénieurs ont besoin de connaître l’état de mer d’un lieu donné. En particulier, ils s’intéressent au champ des vitesses générés par la houle, ce qui leur permet d’estimer les efforts exercés par cette dernière sur les structures. Toutefois, ils n’ont bien souvent à leur disposition que des enregistrements

temporels de l'élévation de la surface en un ou peu de points. Cela est insuffisant pour déterminer la cinématique correspondante. Ils ont donc généralement recours à la méthode semi-empirique de Wheeler (*Wheeler's stretching*), qui est une extrapolation de la théorie linéaire. Cette méthode n'étant pas satisfaisante, on en a développé une nouvelle tout aussi simple mais bien plus performante.

4.2 Wheeler's stretching

Dans la théorie des houles infinitésimales en grande profondeur, les conditions à la surface sont ramenées au niveau moyen et la solution prédit une variation verticale exponentielle du champ des vitesses sous le niveau moyen. Pour prédire les vitesses sous la crête au dessus du niveau repos, le *Wheeler's stretching* consiste à traduire verticalement la solution linéaire (Fig. 4.1) (voir Wheeler 1970). C'est à dire que l'on écrit l'approximation linéaire à partir de la surface comme s'il s'agissait du niveau moyen. Il va de soi que cette méthode hardie est très imprécise pour des vagues d'amplitudes significatives.

4.3 Nouvelle méthode

Une autre approche, plus naturelle, consiste simplement à prolonger le profil exponentiel au dessus du niveau moyen jusqu'à la surface. N'ayant à notre disposition qu'un enregistrement temporel de la position de la surface en un point, il nous faut extrapoler le profil des vitesses. Pour ce faire, on utilise une version de la théorie de Stokes du troisième ordre :

$$\frac{k\phi}{\sqrt{g/k}} = \epsilon \exp(ky) \sin \theta + O(\epsilon^4), \quad (4.1)$$

$$k\eta = \epsilon \left(1 + \frac{1}{8}\epsilon^2\right) \cos \theta + \frac{1}{2}\epsilon^2 \cos 2\theta + \frac{3}{8}\epsilon^3 \cos 3\theta + O(\epsilon^4), \quad (4.2)$$

$$\frac{\omega^2}{gk} = 1 + \epsilon^2 + O(\epsilon^3), \quad (4.3)$$

$$k\eta_{\max} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon^2 + \frac{1}{2}\epsilon^3 + O(\epsilon^4), \quad (4.4)$$

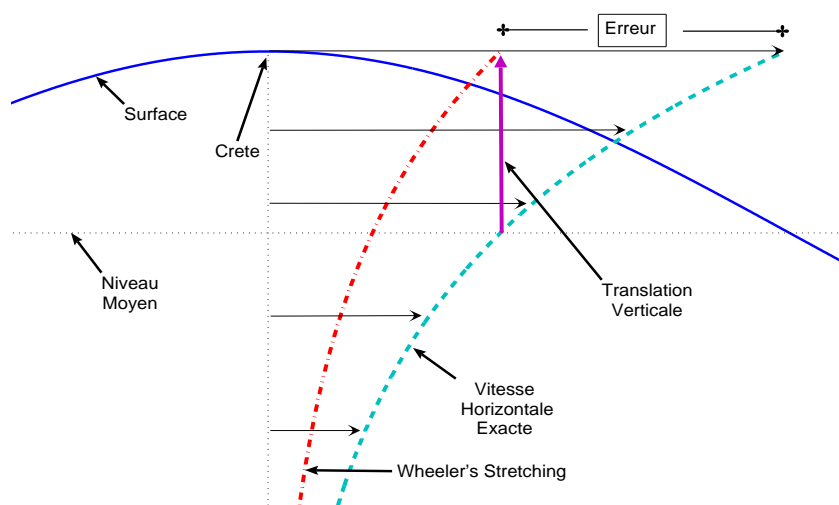
où $\theta = kx - \omega t$.

Afin d'appliquer cette théorie à des houles non-permanentes, on définit une période locale T_{TT} comme le temps séparant deux creux consécutifs, et une amplitude locale η_m comme le maximum de la crête par rapport au niveau moyen. Dès lors, en utilisant les relations ci-dessus, on déduit une longueur d'onde locale et les vitesses correspondantes.

Pour comparer les vitesses horizontales sous la crête $u_0 = \phi_x(\theta = 0, y)$ obtenues de diverses mesures et simulations numériques, on considère la forme adimensionnelle :

$$\frac{u_0}{\epsilon \sqrt{g/k}} = \exp(ky). \quad (4.5)$$

Il ressort de cette formule que les profils d'une onde permanente en grande profondeur sont à peu près autosimilaires. Nous avons donc cherché à vérifier cette prédiction pour des houles non-permanentes.

FIG. 4.1 – Principe du *Wheeler's stretching*.

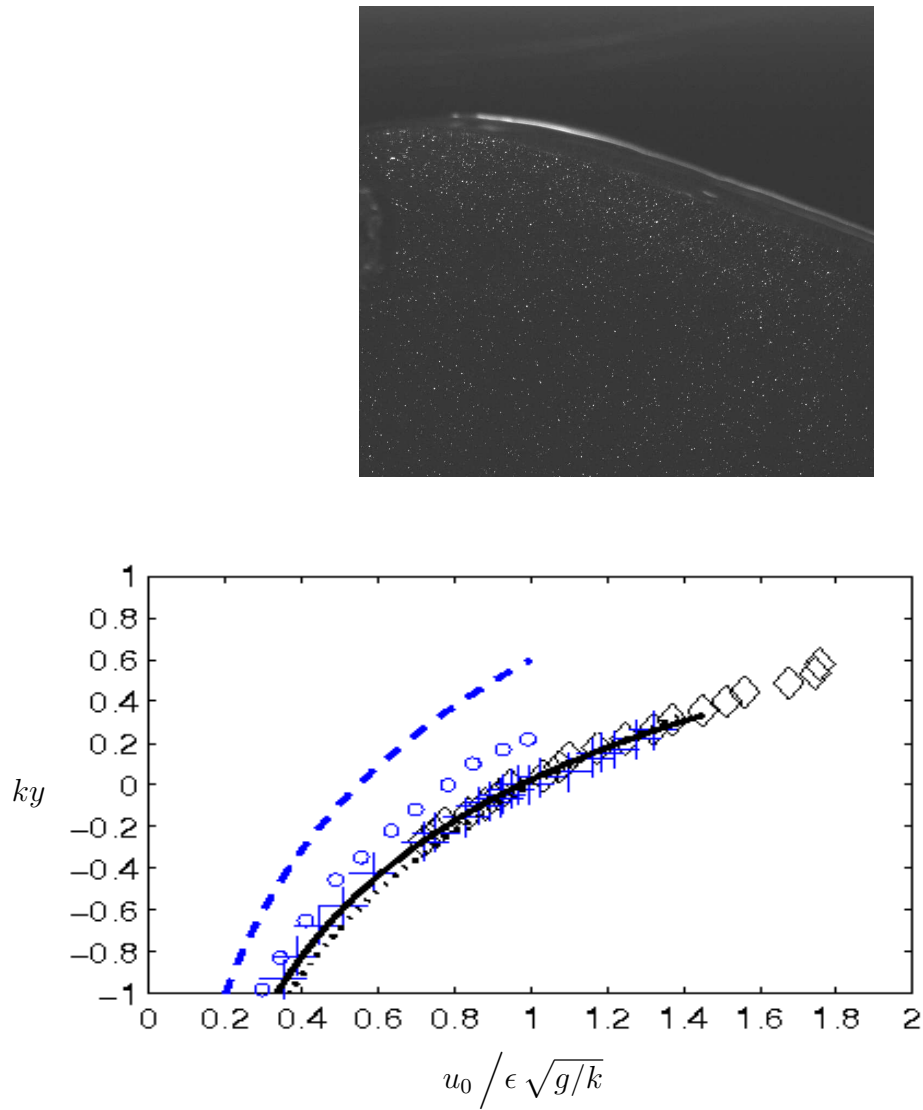


FIG. 4.2 – Une vague extrême et exemples de vitesses horizontales sous l'élévation maximale.
 (– –) Wheeler, (\cdots) $\exp(ky)$, (—) freak wave, (\diamond) photo ci-dessus,
 (+) et (\circ) mesures et théorie du second ordre de Baldock *et al.* (1996).

4.4 Résultats

Par une série de simulations numériques de *freak waves* et d'expériences en laboratoire — mesures non-intrusives PIV (Particle Image Velocimetry) réalisées par mes collègues Atle Jensen et Morton Huseby — sur des vagues extrêmes (vagues déferlantes, houles aléatoires, ondes focussantes) nous avons pu prouver que le champ des vitesses est en effet quasi-autosimilaire, moyennant une erreur de quelques pour cent (voir la figure 4.2 ainsi que les articles [10, 29, 30]). On notera que les expériences ont été répétées plusieurs fois sous les mêmes conditions, et l'on a ainsi vérifié la reproductibilité des mesures. On notera aussi que nos résultats expérimentaux sont en accord ceux de Baldock *et al.* (1996), mais que la théorie du second ordre de ces derniers n'est pas aussi précise que la notre.

Nous avons aussi vérifié que notre approche semi-empirique prédit correctement le champ d'accélération. En fait, les accélérations sont mieux prédites que les vitesses [31, 32]). Ainsi, il apparaît que notre approche est à la fois simple et remarquablement précise pour des applications pratiques.

4.5 Prolongements

Cette approche semi-empirique est de grande importance pour les applications pratiques en ingénierie. Elle a été adoptée par *Den Norske Veritas* (équivalent norvégien du *Bureau Veritas*) en remplacement du *Wheeler's stretching* comme référence pour leurs certifications.

L'analyse ci-dessus n'est valide qu'en grande profondeur. Son extension en profondeur finie et en eau peu profonde est aussi d'un grand intérêt pratique. Les solutions renormalisées présentées au chapitre 3 pourraient servir de point de départ pour une telle généralisation. Ce travail devra s'accompagner de nombreuses expériences et simulations numériques.

Chapitre 5

Futures études et développements

“En toute chose, c’est la fin qui est essentiel.”

Aristote

“Les théories ont causé plus d’expériences que les expériences n’ont causé de théories.”

Joseph Joubert

Jusqu’à présent, mes recherches ont principalement consisté à forger des outils pour l’étude de phénomènes physiques particuliers. Ces outils peuvent aussi être utilisés pour étudier d’autres problèmes. Je présente ici quelques projets de recherches qui seront menés dans un futur proche. Ils sont suites logiques des travaux exposés dans ce mémoire.

Les trois premiers projets (vagues d’étraves, houles complexes, génération de tsunamis) ont des intérêts pratiques évidents. Ils sont aussi peu “risqués”, c’est à dire que ces recherches sont sûres d’aboutir à des résultats. Ils fournissent matière à des sujets de thèses intéressants. Le quatrième projet (interaction houle-structure) est plus hasardeux et nécessite un développement substantiel du modèle numérique. Toutefois, l’importance pratique est telle que c’est une motivation suffisante pour entreprendre cette étude. Enfin, je mentionne brièvement d’autres études et projets de recherche potentiels, dont certains ne sont pas assurés d’aboutir un jour.

5.1 Vagues d'étrave et de sillage

Depuis l'apparition des navires rapides (NGV), de nombreuses plaintes sont apparues suite à des incidents provoqués par les vagues produites par ce type de navires. En effet, ces vagues sont différentes de celles générées par les navires conventionnels, ou même de celles dues au mauvais temps. "A Goteborg en juillet 1997, deux touristes ont été blessés. Leur bateau a subi des avaries par des vagues produites par le car-ferry à grande vitesse *Stena Carisma* naviguant à grande vitesse le long de la côte. Peu de temps après son passage, une vague les a projeté avec leur bateau sur les rochers. Deux accidents similaires ont été causés par le *Stena Lynx* et par le *Super Sea Cat One*. Il semble que ces vagues soient différentes de celle des navires classiques. Elles se rapprochent d'une houle imprévisible que l'on ne voit pas de la surface et qui arrive en se brisant à grande vitesse sur les côtes." (Extrait d'Infocéan, Septembre 1997.)

L'impact des vagues produites par les NGV sur les bateaux de petites tailles peut être considérable; de nombreux incidents se sont produits : échouages, chavirement, hommes à la mer. En effet, dans les zones de changement d'allure (départ, et surtout arrivée) les vagues des NGV sont dangereuses : *i*) la résistance des vagues croît avec l'accélération des navires et lors des décélérations, le phénomène s'amplifie encore quand la coque s'enfonce dans l'eau, augmentant brutalement le déplacement et la taille des vagues; *ii*) les vagues dépassent alors le navire et peuvent surprendre les plaisanciers qui s'attendent à rencontrer ses vagues après le passage du NGV.

Sur la côte, d'autres incidents ont eu lieu sur les plages. On ne voit pas venir ces vagues qui se développent soudainement entraînant une forte aspiration d'eau vers le large avant de se casser successivement sur la côte (mini tsunamis). Ce phénomène très surprenant, est fréquent pendant les mois d'été, lors des périodes de vent et de mer calmes.

Capoulade (2005) donne diverses informations sur les Navires à Grandes Vitesse et leur impact sur l'environnement. Les points soulignés ici montrent que l'étude des vagues d'étrave et de sillage est un problème d'actualité avec des applications pratiques et, de plus, est intéressant du point de vue fondamental.

Les vagues engendrées par un bateau qui avance ont été étudiées par Lord Kelvin dans le cadre de la théorie linéaire (Lighthill 1978; Wehausen & Laitone 1960). Depuis, les travaux sur ce sujet se limitent principalement à des études linéaires, voire faiblement non linéaires (théories du second ordre; voir Yeung 1983), ou utilisent des modèles numériques simplifiés. Or, l'étude des vagues générées par les NGV étant fortement non linéaires, leur étude numérique requiert un modèle précis et suffisamment rapide pour simuler de grands domaines.

Le modèle décrit au chapitre 2 est particulièrement adapté pour cette tâche. Le mécanisme de génération pneumatique peut être utilisé pour simuler les vagues d'étrave d'un bateau en mouvement (quoique assez loin de ce dernier). Il a d'ailleurs en partie été conçu pour cela. En particulier, il sera relativement aisé de simuler des phases d'accélération, de décélération, des virages, etc. Il sera aussi intéressant d'étudier les effets combinés de plusieurs NGV (croisement). Enfin, on étudiera l'interaction entre houle et vague d'étrave.

Il y a là largement matière pour un travail de thèse.

5.2 Houles complexes

Le satellite est un outil privilégié pour l'observation de la surface de la mer. En effet, mesurer la "rugosité" de la surface des océans à une échelle synoptique renseigne sur l'état d'agitation de la surface. Reste à prévoir, à partir de ces données, s'il y a chance de formation de vagues scélérates. Les outils statistiques classiquement utilisés sous-estiment grandement la probabilité d'occurrence de ces vagues. Il faut donc adopter une autre approche.

Dans l'article [4] on a montré que le modèle numérique pouvait simuler des *freak waves*. On a aussi montré qu'il est crucial d'utiliser un modèle très précis pour ce genre de simulations. L'étape naturelle suivante est de considérer des champs de houles tri-dimensionnels et aléatoires. Cela devrait permettre, à terme, de prédire la probabilité d'apparition des *freak waves* pour un état de mer donné, du moins de manière plus réaliste que les outils classiques.

Pour ce faire, on simulera des spectres de JONSWAP qui caractérisent les houles aléatoires (Goda 2000). Cette étude statistique requière de nombreuses simulations dans de grands domaines et sur de longues périodes de temps. C'est une tâche considérable, même pour un schéma numérique rapide comme celui développé à Oslo. Toutefois, la disponibilité prochaine de micro processeurs multi-cœurs devrait permettre de tirer pleinement profit de la parallélisabilité du modèle ; on pourra alors mener ces simulations avec de simples ordinateurs personnels.

Pour être réalistes, les simulations devront aussi incorporer la tension superficielle et le vent. En effet, le vent génère, outre la houle, des ridules ou vaguelettes de capillarité. Ces dernières contribuent fortement à la "rugosité" de la surface des mers et sont détectées par les satellites.

La tension de surface est déjà incorporée au modèle. L'effet du vent sera modélisé par l'ajout d'une pression supplémentaire dans l'équation de Bernoulli ; cette pression étant choisie proportionnelle au gradient de la surface.

Cette étude intéresse l'industrie *off-shore* et les météorologistes. *Den Norske Veritas* a débloqué des fonds pour cela et le début des travaux est prévu pour 2006.

5.3 Génération de tsunamis

Le raz de marée du 26 décembre a relancé l'intérêt pour l'étude de la génération et de la propagation des tsunamis. Ces derniers résultent de tremblements de terre ou d'éboulements sous marins : ils sont la conséquence des variations spatio-temporelles du fond marin. Ces événements ont généralement lieu en grande profondeur où leur manifestation à la surface est très faible. Ce n'est qu'à l'approche des côtes que, due au ralentissement de l'onde, le niveau de la mer s'élève de façon importante.

On voit que ce problème requiert la modélisation de la propagation des ondes en grande et faible profondeur, sur de grands domaines et de longues périodes de temps. Cela est hors de portée des modèles classiques car soit ils sont trop lents, soit ils ont un domaine de validité restreint. En revanche, le schéma numérique décrit au chapitre 2 est particulièrement adapté à ce genre de simulation. Il faut toutefois le modifier en incorporant un fond variable en espace et en temps. Le modèle reposant sur une formulation intégrale aux frontières, il est aisé de le modifier pour un fond variable. Il est intéressant de noter que cela n'est pas le cas pour les autres schémas numériques pour lesquels les tentatives en ce sens sont restées infructueuses ou, au mieux, très peu performantes (discussions privées).

Cette recherche a commencé (Fructus & Grue 2005) et les premiers résultats sont très encourageants. Toutefois, pour l'instant les variations du fond sont localisées dans l'espace et le fond reste horizontal au loin, ce qui induit des simplifications importantes. On s'attachera donc à généraliser ce travail préliminaire en autorisant le fond à varier de façon importante sur tout le domaine. Cela permettra de simuler les tsunamis jusqu'à la côte. Pour ce faire, on utilisera la méthode des images appliquée à des plans inclinés auxquels on superposera de 'petites' variations.

J'ajoute que l'intérêt de ce modèle ne se limite pas à l'étude des tsunamis mais qu'il sera aussi fort utile pour divers problèmes de génie côtier, tel la réfraction des ondes.

5.4 Interaction houle-structure

Généraliser le modèle numérique en incorporant des obstacles submergés, ou un fond variable, est une tâche relativement "aisée". Bien plus difficile est la prise en compte d'obstacles perçants la surface. Un modèle rapide et précis simulant l'interaction houles-structures reste à développer. Il serait d'un grand intérêt pratique en hydrodynamique et pour l'industrie *off-shore*, et permettrait aussi d'étudier des phénomènes intéressants du point de vue de la recherche fondamentale (e.g., *ringing*, diffraction).

Pour des obstacles simples (cylindres) la méthode des images peut être employée, du moins en principe. En pratique, l'écoulement image est singulier ce qui rend les calculs numériques impossibles.

Une possibilité pour contourner cette difficulté est de prolonger l'écoulement à l'intérieur de l'obstacle non pas par un laplacien (comme c'est le cas pour l'écoulement extérieur) mais par un multi-laplacien. Cela donne plus de liberté sur le champ intérieur et permet d'éviter les singularités. L'étude mathématique de la faisabilité de cette "interpolation" par multi-laplaciens est entreprise par Øyvind Kristiansen dans le cadre de sa thèse. Si elle s'avère raisonnable, l'étape suivante consistera à son implémentation. La faisabilité "sur papier" ne suffit pas à garantir le succès. Il faudra alors se livrer à d'intenses tests pour valider et optimiser la méthode afin de la rendre performante (c'est à dire rapide, stable et précise).

Une autre piste consiste à modéliser l'obstacle en changeant localement les propriétés physiques du milieu. Concrètement, on introduira une "viscosité" locale si grande qu'elle interdise le mouvement du fluide, simulant ainsi l'effet d'un corps rigide. Des collègues ayant apprécié l'efficacité de l'absorbeur décrit au chapitre 2, m'ont suggéré d'adapter la méthode

pour les obstacles. À ce jour, je ne sais pas sous quelle forme cette généralisation pourra ce faire, ni même si elle est faisable, mais c'est une voie de recherche intéressante.

5.5 Autres investigations

En l'état, le modèle peut être utilisé pour la simulation et l'analyse de nombreux phénomènes tandis que d'autres études requièrent des améliorations. J'ai détaillé quelques travaux plus haut. Je mentionne ici brièvement d'autres études possibles.

Pour compléter les travaux sur l'instabilité des houles de Stokes, on pourra se livrer à une étude similaire pour les houles cnoïdale et l'onde solitaire.

Une extension directe du modèle est la généralisation en multicouche homogène afin de pouvoir étudier les ondes internes (Grue 2002) . Un tel modèle sera très utile pour de nombreux problèmes relevant de l'océanographie. Son implementation est d'ailleurs prévue pour l'année prochaine.

Diverses perspectives à plus long terme sont aussi envisageables. Par exemple, il serait intéressant d'introduire des écoulements rotationnels et la viscosité. En effet, un tel écoulement peut être décomposé en deux parties, potentielle et vorticity. On a déjà le code pour la partie potentielle, reste à introduire la composante vorticity. Étant donné qu'il est possible de décrire cette dernière à l'aide d'une distribution de tourbillons (Saffman 1988), on essaiera donc d'adopter cette approche pour modéliser les écoulements visqueux.

Une partie de la méthode numérique repose sur un *a priori* physique (troncature des intégrales sur une période "caractéristique"). Une étude mathématique précise pourrait ancrer le modèle sur des bases plus solides et, par là même, amener son optimisation.

Enfin, j'ai mentionné à la fin du chapitre 3 la possibilité de généraliser la méthode de renormalisation au cas tridimensionnel, ainsi que d'utiliser d'autres bases de fonctions que les séries de Fourier pour développer un modèle numérique ultra performant. Tout comme les deux dernières recherches précédemment mentionnées, il s'agit là de recherches ambitieuses s'inscrivant sur le long terme. Rien ne garantit qu'elles aboutiront.

Chapitre 6

Conclusion

“Tout le monde veut vivre au sommet de la montagne, sans soupçonner que le vrai bonheur est dans la manière de gravir la pente.”

Gabriel Garcia Marquez

“Il n’y a pas de problème, il n’y a que des professeurs.”

Jacques Prévert

Ma recherche concerne la modélisation (au sens large) des ondes surfaciques de gravité. L’originalité principale du travail est l’affranchissement des limitations classiquement liées à la profondeur d’eau relative. Ce faisant, on a obtenu des modèles qui, par bien des aspects, sont en fait plus simples, plus précis et plus généraux que ceux traditionnellement utilisés. Les modèles analytiques sont très simples, le modèle numérique est très précis et rapide. Le but ultime de cette recherche est de faire se rejoindre ces deux approches : obtenir un modèle analytiquement très simple, très précis et permettant des simulations numériques ultra rapides. Dans cette quête, de nombreuses études et généralisations se présenteront. J’ai indiqué quelques pistes dans ce résumé.

L’étude de problèmes relatifs au génie côtier nécessite l’extension du modèle pour des fonds variables en espace et en temps. On pourra ainsi, par exemple, étudier la génération de tsunamis en grande profondeur et leurs propagations jusqu’aux côtes en eau peu profonde, où leur impact est dévastateur. Un autre développement consiste à étudier l’influence des vagues sur des obstacles perçant la surface (e.g. piliers de plates-formes, bateaux). Ces investigations sont importantes pour de nombreux problèmes liés à l’hydrodynamique et

au génie marin. Encore une autre extension directe du modèle est sa généralisation en plusieurs couches homogènes permettant l'étude des ondes internes. Les applications en océanographie sont évidentes.

Diverses perspectives à plus long terme sont aussi envisageables. L'introduction de la vorticité et de la viscosité trouvera des applications pour le transport sédimentaire, par exemple, et le génie côtier en général. Enfin, ancrer la méthode sur des bases mathématiques solides devrait permettre de cerner tout son potentiel et ses limitations. Cela devrait aussi amener son optimisation.

Les modèles numériques performants exploitent des outils mathématiques qui 'respectent' la physique des phénomènes étudiés, et en tirent avantage. Pour cela, les modèles analytiques simplifiés sont d'un grand intérêt. En effet, ils permettent de comprendre qualitativement les mécanismes mis en jeu et, par là même, peuvent suggérer de nouveaux schémas numériques (basés sur des fonctions propres appropriées, par exemple). Ainsi, le développement des méthodes de perturbations et de renormalisations présentées au chapitre 3 seront d'une grande utilité.

S'il est difficile de prévoir aujourd'hui la tournure exacte de cette recherche sur le long terme (cela dépendra des succès, des échecs, des desiderata des thésards, des financements, etc.), il est en revanche certain que nous avons là matière pour de nombreuses investigations.

Bibliographie

Références de l’auteur jointes au mémoire

- [1] CLAMOND, D. & GRUE, J. 2001. A fast method for fully nonlinear water wave computations. *J. Fluid Mech.* **447**, 337–355.
- [2] FRUCTUS, D., CLAMOND, D., KRISTIANSEN, Ø. & GRUE, J. 2005. An efficient model for three-dimensional surface wave simulations. Part I : Free space problems. *J. Comp. Phys.* **205**, 665–685.
- [3] CLAMOND, D., FRUCTUS, D., KRISTIANSEN, Ø. & GRUE, J. 2005. An efficient model for three-dimensional surface wave simulations. Part II : Generation and absorption. *J. Comp. Phys.* **205**, 686–705.
- [4] CLAMOND, D., FRANCIUS, M., GRUE, J. & KHARIF, C. 2005. Strong interaction between envelope solitary surface gravity waves. Submitted.
- [5] FRUCTUS, D., KHARIF, C., FRANCIUS, M., KRISTIANSEN, Ø., CLAMOND, D. & GRUE, J. 2004. Dynamics of crescent water wave patterns. *J. Fluid Mech.* **537**, 155–186.
- [6] KRISTIANSEN, Ø., FRUCTUS, D., CLAMOND, D. & GRUE, J. 2005. Simulations of crescent wave patterns on finite depth. *Phys. Fluids* **17**, 064101.
- [7] CLAMOND, D. & GERMAIN, J.-P. 1999. Interaction between a Stokes wave packet and a solitary wave. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **8**, 1, 67–91.
- [8] CLAMOND, D. 1999. Steady finite amplitude waves on a horizontal seabed of arbitrary depth. *J. Fluid Mech.* **398**, 45–60.
- [9] CLAMOND, D. 2003. Cnoidal-type surface waves in deep water. *J. Fluid Mech.* **489**, 101–120.
- [10] GRUE, J., CLAMOND, D., HUSEBY, M. & JENSEN, A. 2003. Kinematics of extreme water waves. *Appl. Ocean Res.* **25**, 6, 355–366.

Références de l'auteur citées dans le mémoire

Modélisation numérique

- [11] CLAMOND, D. & GRUE, J. 2000. Fast fully nonlinear simulations of water waves. *Proc. 13th Nordic Seminar on Computational Mechanics*, NSCM-13, Oslo, Norway, Oct. 20–21, 82–85.
- [12] CLAMOND, D. & GRUE, J. 2001. On a fast method for simulations of steep water waves. *Proc. 16th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Hiroshima, Japan, Apr. 22–25, 25–28.
- [13] CLAMOND, D., FRUCTUS, D., GRUE, J. & FRANCIUS, M. 2003. A fast method for fully nonlinear three-dimensional water wave simulations. *EGS-AGU-EUG Joint Assembly*, Nice, France, EAE03-A-11093.
- [14] CLAMOND, D., FRUCTUS, D. & GRUE, J. 2004. A new absorbing boundary condition for three-dimensional surface wave simulations. *Proc. 19th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Cortona, Italy, Mar. 28–31.

Vagues scélérates

- [15] CLAMOND, D. & GRUE, J. 2001. On an efficient numerical model for freak wave simulations. *Proc. 11th Int. Offshore and Polar Engineering Conference*, Stavanger, Norway, Vol. III, 54–57.
- [16] CLAMOND, D. & GRUE, J. 2002. Differences between weakly nonlinear and fully nonlinear dynamics of groups of water waves. *Eur. Geophys. Soc. Congres*, Nice, France.
- [17] CLAMOND, D. & GRUE, J. 2002. Interaction between envelope solitons as a model for freak wave formations. Part I : Long time interaction. *C. R. Mécanique* **330**, 8, 575–580.
- [18] CLAMOND, D. & GRUE, J. 2002. Some dynamical aspects of freak waves. *Proc. 17th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Cambridge UK, Apr. 14–17, 29–32.
- [19] CLAMOND, D. & GRUE, J. 2002. Some nonlinear behaviour of freak waves and envelope solitons. *Proc. 21st Int. Conf. on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Oslo, Norway, June 23–28, OMAE2002-28523.
- [20] GRUE, J., CLAMOND, D., FRANCIUS, M. & KHARIF, K. 2004. On the role of downshifting in formation of large wave events. *Rogue Waves 2004 Workshop*, Brest, France, Oct. 20–22.

Instabilités

- [21] FRUCTUS, D., CLAMOND, D. & GRUE, J. 2003. Unsteady simulations of fully nonlinear wave patterns in 3D. *Proc. Int. Symp. Topical Problems of Nonlinear Waves Physics*, Nizhny Novgorod, Sep. 6–12, 3-40 Invited, 319–320.

- [22] FRUCTUS, D., KHARIF, C., FRANCIUS, M., CLAMOND, D., KRISTIENSEN, Ø. & GRUE, J. 2004. Dynamics of crescent wave patterns in a Channel. *Proc. XXI I.C.T.A.M.*, Warsaw, Poland, Aug. 15–21.
- [23] KRISTIENSEN, Ø., FRUCTUS, D., CLAMOND, D., & GRUE, J. 2005. Simulations of Stokes wave instabilities on finite depth. *Fourth IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena : Computation and Theory*. Athens, GA, USA, April 11–14.

Interaction onde courte – onde longue

- [24] CLAMOND, D. 1994. Amplitudes et phases dans la théorie des ondes de gravité. *Thèse de doctorat*, Université Joseph Fourier, Grenoble, France.
- [25] CLAMOND, D. & BARTHÉLÉMY, E. 1995. Experimental determination of the phase shift in the Stokes wave - solitary wave interaction. *C. R. Acad. Sci. Paris* **320**, II b, 277–280.
- [26] CLAMOND, D. & GERMAIN, J.-P. 1994. Propagation of a Stokes wave on a solitary wave. *Modelling of Coastal and Estuarine Processes*, Coimbra, Portugal, 133–142.

Renormalisation

- [27] CLAMOND, D. 1998. Reconstruction of a long wave velocity field. *C. R. Acad. Sci. Paris* **326**, II b, 2, 91–94.
- [28] CLAMOND, D. & FRUCTUS, D. 2003. Accurate simple approximation for the solitary wave. *C. R. Mécanique* **331**, 11, 727–732.

Modèle empirique

- [29] CLAMOND, D., GRUE, J., HUSEBY, M. & JENSEN, A. 2003. Theoretical and experimental analysis of the velocity profile under crest of extreme water waves *Proc. 18th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Le Croisic, Apr. 6–9.
- [30] CLAMOND, D., GRUE, J., HUSEBY, M. & JENSEN, A. 2004 PIV Measurements of the velocity field in steep water waves events. *PIV and Water Waves, Advances in Coastal and Ocean Engineering* **9**, Ed. J. Grue, Ph. Liu, G. Pedersen, World Scientific, 282–284.
- [31] JENSEN, A., HUSEBY, M., CLAMOND, D., PEDERSEN, G. & GRUE, J. 2004. PIV Measurements of accelerations in water waves. *PIV and Water Waves, Advances in Coastal and Ocean Engineering* **9**, Ed. J. Grue, Ph. Liu, G. Pedersen, World Scientific, 279–281.
- [32] JENSEN, A., CLAMOND, D. & GRUE, J. 2005. Accelerations of extreme water waves. Submitted to *Appl. Ocean Res.*

Références générales

- [33] BALDOCK, T. E., SWAN, C. & TAYLOR, P. H. 1996. A laboratory study of nonlinear surface water waves. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **354**, 649–676.
- [34] CAPOULADE, F. 2005. <http://perso.wanadoo.fr/fcapoulade>
- [35] CRAIG, W. & SULEM, C. 1993. Numerical simulation of gravity waves. *J. Comp. Phys.* **108**, 73–83.
- [36] CRAIK, A. D. D. 2004. The origins of water wave theory. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **36**, 1–28.
- [37] DARRIGOL, O. 2003 The spirited horse, the engineer, and the mathematicien: Water waves in nineteenth-century hydrodynamics. *Arch. Hist. Exact Sci.* **58**, 21–95.
- [38] DOMMERMUTH, D. & YUE, D. K. P. 1987. A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves. *J. Fluid Mech.* **184**, 267–288.
- [39] DOLD, J. W. 1992. An efficient surface-integral algorithm applied to unsteady gravity waves. *J. Comput. Phys.* **103**, 1, 90–115.
- [40] DUCROZET, G., BONNEFOY, F., LE TOUZÉ, D. & FERRAND, P. 2005. Development of a fully nonlinear water wave simulator based on higher-order spectral theory. *Proc. 20th IWWFNB*, Longyearbyen, Norway.
- [41] DYSTHE, K. B. 1979. Note on a modification to the nonlinear Schrödinger equation for application to deep water. *Proc. R. Soc. Lond. A* **369**, 105–114.
- [42] FENTON, J. D. 1988. The numerical solution of steady water wave problems. *Computer & Geosciences* **14**, 3, 357–368.
- [43] FENTON, J. D. 1999. Numerical methods for nonlinear waves. *Advances in Coastal and Ocean Engineering* **5**, 241–324. World Scientific.
- [44] FENTON, J. D. & RIENECKER, M. M. 1982. A Fourier method for solving nonlinear water wave problems : Application to solitary wave interactions. *J. Fluid Mech.* **118**, 411–443.
- [45] FRUCTUS, D. & GRUE, J. 2005. Fully nonlinear and simplified models for 3D water waves generated by a moving bottom. *Proc. 20th IWWFNB*, Longyearbyen, Norway.
- [46] GIVOLI, D. 1991. Review article : Non-reflecting boundary conditions. *J. Comp. Phys.* **94**, 1, 1–29.
- [47] GODA, Y. 2000. Random seas and design of maritime structures. *Adv. Ser. Ocean Eng.* **15**. World Scientific.
- [48] GRILLI, S. T., GUYENNE, PH. & DIAS, F. 2001. A Fully Nonlinear Model for Three-Dimensional Overturning Waves Over Arbitrary Bottom. *Int. J. Num. Meth. Fluids* **35**, (7), 829–867.

- [49] GRUE, J. 2002. On four highly nonlinear phenomena in wave theory and marine hydrodynamics. *Appl. Ocean Res.* **26**, 261–274.
- [50] LAGRANGE, J.-L. 1781. Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides. *Nouv. Mém. Acad. Berlin*, 196.
- [51] LIGHTHILL, J. 1978. *Waves in fluids*. Cambridge University Press.
- [52] MEI, C. C. 1989. *The applied dynamics of water waves*. World Scientific.
- [53] SAFFMAN, P. G. 1992. *Vortex dynamics*. Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics.
- [54] SU, M. Y. 1982. Three-dimensional deep-water waves. Part 1. Experimental measurement of skew and symmetric wave patterns. *J. Fluid Mech.* **124**, 73–108.
- [55] WEHAUSEN, J. V. & LAITONE, E. V. 1960. Surface waves. *Handbuch der Physik* **9**, 3, 446–778. Springer-Verlag.
- [56] WHELLER, J. D. 1970. Method for calculating forces produced by irregular waves. *Proc. First Ann. Offshore Technol. Conf.* **1**, 71–82.
- [57] WEST, B. J., BRUECKNER, K. A., JANDA, R. S., MILDER, D. M. & MILTON, R. L. 1987. A new numerical method for surface hydrodynamics. *J. Geophys. Res.* **92**, 11, 11803–11824.
- [58] XUE, M., XÜ, H., LIU, Y. AND YUE, D. K. P. 2001. Computations of fully nonlinear three-dimensional wave-wave and wave-body interactions. Part 1. Dynamics of steep three-dimensional waves. *J. Fluid Mech.*, **438**, 11-39.
- [59] YEUNG, R. W. 1983. Proceedings of the International Workshop on Ship and Platform Motion.
- [60] ZAKHAROV, V. E. 1968. Stability of periodic wave of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *J. Appl. Mech. Phys.*, Engl. Transl. **2**, 190–198.