

# Chapitre 6

## Options américaines

Alors qu'une option européenne ne donne à son détenteur le droit d'exercer (et d'obtenir le pay-off) qu'à un instant fixé  $T$ , l'option américaine correspondante lui donne ce droit à tout instant  $t \in [0..T]_{\delta t} := \{0, \delta t, 2\delta t, \dots, T = n\delta t\}$  compris entre 0 et  $T$ . Par exemple un call européen sur l'actif  $S_t$  rapportera  $(S_T - K)^+$  à la date  $T$  et le call américain sur le même actif sous-jacent rapportera, s'il est exercé à la date  $t$ , le pay-off  $\varphi(S_t) = (S_t - K)^+$ . Nous allons dans cette leçon apprendre à calculer le prix d'une option américaine et au passage nous découvrirons quelques beaux outils du calcul stochastique comme le théorème d'arrêt optimal ou la décomposition de Doob-Meyer des surmartingales.

### 6.1 Calcul du prix par récurrence rétrograde

Comme précédemment, le processus  $(S_t)$ , défini pour tout  $t \in [0..T]_{\delta t} := \{0, \delta t, 2\delta t, \dots, T = N\delta t\}$ , représente l'évolution d'un actif financier au cours du temps, et on le suppose adapté par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_t)$  qui représente l'information disponible à l'instant  $t$ . Désignons par  $U_t$  la valeur à l'instant  $t$  d'une option américaine dont le pay-off est noté  $\varphi(S_t)$  (s'il exerce son option à l'instant  $t$ , le détenteur de l'option reçoit  $\varphi(S_t)$ ). Comment évaluer son prix ?

On le détermine de proche en proche à partir de la valeur finale la valeur minimale d'un portefeuille de couverture. Tout d'abord, si l'option n'a pas été exercée avant la date finale  $T$ , elle vaudra en  $t = T$  le pay-off  $\varphi(S_T)$ . A l'instant précédent  $t = T - \delta t$ , le vendeur devra pour se couvrir disposer d'une richesse au moins égale au pay-off  $\varphi(S_{T-\delta t})$ , pour le cas où le détenteur de l'option l'exercerait à cette date, et en même temps au moins égale à  $e^{-r\delta t}\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_{T-\delta t})$  qui est le prix d'un portefeuille de couverture lui permettant de faire face à ses obligations à la date  $T$  si le détenteur ne vient pas exercer avant  $T$ . On peut donc écrire pour le prix de l'option américaine en  $T - \delta t$  :

$$U_{T-\delta t} = \text{Max} \{ \varphi(S_{T-\delta t}), e^{-r\delta t}\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_{T-\delta t}) \} = \text{Max} \{ \varphi(S_{T-\delta t}), e^{-r\delta t}\mathbb{E}(U_T/\mathcal{F}_{T-\delta t}) \}$$

Mais on peut reproduire ce raisonnement pour l'instant  $t = T - 2\delta t$ , et ainsi de suite. On obtient ainsi la relation de récurrence rétrograde suivante :

$$\begin{cases} U_t &= \text{Max} (\varphi(S_t), e^{-r\delta t}\mathbb{E}(U_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)) \\ U_T &= P_T \end{cases} \quad (6.1)$$

Dans le cas d'une option européenne, par exemple un Call, on déduit facilement de la relation de récurrence  $C_t = e^{-r\delta t}\mathbb{E}(C_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)$  la formule fondamentale  $C_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}(C_T/\mathcal{F}_t)$  indiquant que la valeur de l'option à l'instant  $t$  est l'espérance actualisée de son pay-off. Dans le cas d'une option américaine, on ne déduit pas facilement de cette relation (A.2) la valeur de  $U_t$  directement comme une fonction de  $t$  et du pay-off final  $\varphi(S_T)$  mais nous verrons qu'il existe néanmoins une formule fermée de ce type, quoique moins explicite. Par contre, il est facile de programmer cette récurrence pour calculer la prime  $U_t$  à tout instant  $t$ .

On ne sera pas surpris que l'option américaine soit plus chère, ou au moins aussi chère, que l'option européenne correspondante puisqu'elle donne plus de droits. La différence entre les deux s'appelle la *prime d'exercice anticipé* (*early exercise premium*). Dans quels cas a-t-on intérêt à exercer de façon anticipée c'est-à-dire dans quels cas cette prime est-elle strictement positive ? Nous allons voir que ce n'est jamais le cas pour un Call, sauf si l'actif sous-jacent distribue des dividendes et que par contre c'est généralement le cas pour un Put, à moins de pouvoir supposer nul le taux d'intérêt  $r$  (ce qui ne serait pas très réaliste).

**Proposition 6.1** *En supposant que l'actif sous-jacent  $S_t$  ne distribue pas de dividende, le prix d'un Call américain sur  $S_t$  est égal au prix du Call européen de même date et même prix d'exercice. Autrement dit, la prime d'exercice anticipée est nulle.*

**Preuve :** On déduit de (A.2) que pour tout  $t$ ,  $U_{t+\delta t} \geq \varphi(S_{t+\delta t})$ . L'espérance conditionnelle et l'actualisation conservant cette inégalité, il en résulte que

$$e^{-r\delta t} \mathbb{E}(U_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) \geq e^{-r\delta t} \mathbb{E}(\varphi(S_{t+\delta t}) / \mathcal{F}_t).$$

Comme  $\varphi(S_t) = (S_t - K)^+$  est une fonction convexe de  $S_t$ , l'inégalité de Jensen<sup>1</sup> implique que

$$e^{-r\delta t} \mathbb{E}(U_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) \geq (e^{-r\delta t} \mathbb{E}(S_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) - e^{-r\delta t} K)^+.$$

Mais comme la valeur actualisée de  $S_t$  est une martingale,  $e^{-r\delta t} \mathbb{E}(S_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) = S_t$ , et donc

$$e^{-r\delta t} \mathbb{E}(U_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) \geq (S_t - e^{-r\delta t} K)^+ \geq (S_t - K)^+ = \varphi(S_t),$$

la dernière inégalité résultant simplement du fait que  $-e^{-r\delta t} \geq -1$ . Des deux termes du maximum de (A.2), le second reste, pour tout  $t$ , supérieur ou égal au premier. Il n'y a donc pas d'intérêt à exercer l'option avant la date finale  $T$ .  $\square$

On notera que si l'on remplace dans ce calcul le pay-off du Call  $(S_t - K)^+$  par celui du Put  $(K - S_t)^+$ , la dernière inégalité cesse d'être satisfaite dès que  $r > 0$ . Et, de fait, si l'exercice anticipé n'est jamais intéressant dans le cas du Call, il l'est souvent dans celui du Put (sauf si  $r = 0$ ), comme nous allons le voir maintenant.

## 6.2 Théorème d'arrêt optimal

Rien dans la formule de récurrence (A.2) ne permet aisément au détenteur de l'option américaine de savoir à quel moment un exercice anticipé pourrait être intéressant pour lui. En réalité, il existe une courbe dans l'espace  $(t, S_t)$  appelée la *frontière d'exercice* (voir la figure 6.1) qui a la propriété suivante : aussi longtemps que le cours de l'actif sous-jacent  $S_t$  ne franchit pas cette courbe, un exercice anticipé n'est pas intéressant (il est préférable de garder l'option) mais dès que le cours la franchit, il est intéressant d'exercer et il est même préférable de le faire sans attendre. On ne sait pas calculer l'équation explicite de cette courbe mais on peut en calculer des approximations plus ou moins facilement. D'un point de vue théorique, on peut montrer que cette frontière d'exercice est le lieu d'un temps d'arrêt appelé *temps d'arrêt optimal*. On a le théorème suivant :

**Théorème 6.2** *Si  $\mathcal{T}(t, T)$  désigne l'ensemble des temps d'arrêt à valeur dans  $[t..T]_{\delta t}$ , le prix à l'instant  $t$  de l'option américaine de pay-off  $\varphi(S_t)$  est donnée par*

$$U_t = \text{Max}_{\tau \in \mathcal{T}(t, T)} e^{-r(T-t)} \mathbb{E}(\varphi(S_\tau) / \mathcal{F}_t)$$

la maximum étant atteint pour le temps d'arrêt  $\tau_t$  défini par

$$\tau_t := \text{Min} \{s \in [t..T]_{\delta t} \text{ , } U_s = \varphi(S_s)\}.$$

Notons qu'en particulier, si on applique ce théorème au cas où  $t = 0$ , la prime d'une option américaine  $U_0$  est égale à  $U_0 = e^{-rT} \mathbb{E}(\varphi(S_{\tau_0}))$ , où  $\tau_0$  est le premier instant où le prix de l'option est égal au pay-off, c'est-à-dire le premier instant où le maximum de la formule (A.2) est égal au premier des deux termes. Plus précisément, tant que ce maximum est égal au second terme (espérance des valeurs futures), il n'est pas intéressant d'exercer, mais au premier instant où le pay-off dépasse la valeur de la couverture, il convient d'exercer.

**Preuve :** Pour simplifier, voici la preuve dans le cas particulier où  $t = 0$  le cas général étant très semblable.

On introduit la valeur actualisée de l'option américaine  $\tilde{U}_t$  définie par  $\tilde{U}_t = e^{-rt} U_t$  et on considère  $\tilde{U}_{t \wedge \tau_0}(\omega)$  qui est égale à  $\tilde{U}_t(\omega)$  aussi longtemps que  $t < \tau_0(\omega)$  et à une constante  $\tilde{U}_{\tau_0(\omega)}(\omega)$  pour tout

<sup>1</sup>pour  $\varphi$  convexe,  $\mathbb{E}(\varphi(X)) \geq \varphi(\mathbb{E}(X))$ , puisque l'hypergraphe de  $\varphi$  est convexe - observer comment sont localisés  $\mathbb{E}(X, \varphi(X))$  et  $(\mathbb{E}(X), \varphi(\mathbb{E}(X)))$ ; dans notre contexte finitaire,  $\mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_t)(\omega) = \mathbb{E}(Y | \bar{\omega}_t)$ , où  $\bar{\omega}_t$  désigne l'atome de  $\omega$  dans l'algèbre  $\mathcal{F}_t$ .

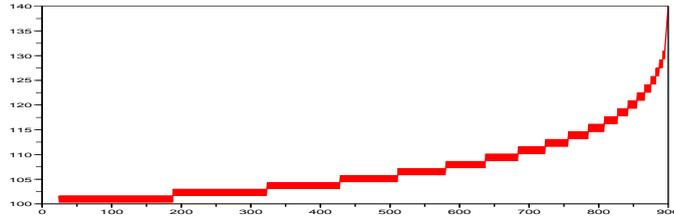


FIG. 6.1 – Tracé de la frontière d'exercice du put américain à la monnaie dans un modèle de Cox, Ross et Rubinstein avec  $\sigma = 0.4$ ,  $r = 0.05$ ,  $T = 1$ , et  $n = 900$ .

$t \geq \tau_0(\omega)$ . Cette marche est appelée la marche  $\tilde{U}$  arrêtée au temps  $\tau_0$ . Nous allons vérifier que cette marche est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale : par définition de  $\tau_0$ , comme  $1 = \mathbb{I}_{t < \tau_0} + \mathbb{I}_{t \geq \tau_0}$  et ces deux indicatrices étant  $\mathcal{F}_t$ -mesurable, puisque  $\tau_0$  est un  $\mathcal{F}$ -temps d'arrêt, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tilde{U}_{(t-\delta t) \wedge \tau_0} - \tilde{U}_{t \wedge \tau_0} / \mathcal{F}_t) &= \mathbb{I}_{t < \tau_0} \mathbb{E}(\tilde{U}_{(t-\delta t) \wedge \tau_0} - \tilde{U}_{t \wedge \tau_0} / \mathcal{F}_t) + \mathbb{I}_{t \geq \tau_0} \mathbb{E}(\tilde{U}_{(t-\delta t) \wedge \tau_0} - \tilde{U}_{t \wedge \tau_0} / \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{t < \tau_0} (\tilde{U}_{(t-\delta t) \wedge \tau_0} - \tilde{U}_{t \wedge \tau_0}) / \mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(\mathbb{I}_{t \geq \tau_0} (\tilde{U}_{(t-\delta t) \wedge \tau_0} - \tilde{U}_{t \wedge \tau_0}) / \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{t < \tau_0} (\tilde{U}_{t-\delta t} - \tilde{U}_t) / \mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(\mathbb{I}_{t \geq \tau_0} (\tilde{U}_{\tau_0} - \tilde{U}_{\tau_0}) / \mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

Or sur  $\{t < \tau_0\}$ ,  $\tilde{U}_{t-\delta t} = \mathbb{E}(\tilde{U}_t / \mathcal{F}_{t-\delta t})$  d'après (A.2) et donc le premier terme est nul. C'est évidemment le cas aussi du second donc  $\tilde{U}_{t \wedge \tau_0}$  est bien une martingale.

Il en résulte que  $\tilde{U}_{0 \wedge \tau_0} = \mathbb{E}(\tilde{U}_{T \wedge \tau_0})$  et donc que l'on a bien  $U_0 = \mathbb{E}(\varphi(S_{\tau_0}))$ .

Il reste à vérifier que pour tout temps d'arrêt  $\tau \in \mathcal{T}(t, T)$ ,  $\mathbb{E}(\varphi(S_{\tau_0})) \geq \mathbb{E}(\varphi(S_\tau))$ . On a bien en effet

$$\mathbb{E}(\varphi(S_{\tau_0})) = U_0 \geq \mathbb{E}(U_{t \wedge \tau}) = \mathbb{E}(U_\tau) \geq \mathbb{E}(\varphi(S_\tau))$$

la première inégalité résultant du fait qu'une surmartingale arrêtée (ici il s'agit de  $\tilde{U}_{t \wedge \tau}$ ) est encore une surmartingale (exercice) et la seconde du fait que pour tout  $t$  on a  $U_t \geq \varphi(S_t)$  d'après (A.2).  $\square$

**Remarque :** Si l'on désigne comme nous l'avons fait pour  $U_t$ , par  $\widetilde{\varphi}(S_t)$  le pay-off actualisé, la formule (A.2) peut s'écrire plus simplement

$$\tilde{U}_t = \max\{\widetilde{\varphi}(S_t), \mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t)\}.$$

On peut alors vérifier que  $\tilde{U}_t$  est une surmartingale, et plus précisément que cette formule la définit comme la plus petite surmartingale qui majore le pay-off actualisé  $\widetilde{\varphi}(S_t)$ . C'est ce que l'on appelle l'enveloppe de Snell de ce pay-off actualisé  $\widetilde{\varphi}(S_t)$ .

Le théorème précédent est en fait un théorème général qui permet d'exprimer toute enveloppe de Snell comme une martingale obtenue en arrêtant de façon appropriée la surmartingale constituée par cette enveloppe de Snell.

### 6.3 Stratégie de couverture avec consommation

Nous avons justifié la définition par récurrence retrograde du prix de l'option américaine en indiquant qu'avec cette valeur le vendeur de l'option pouvait se couvrir dans tous les cas, que le détenteur exerce de façon anticipé ou non. Mais comme nous allons le voir maintenant il ne s'agit plus ici, comme dans le cas européen, d'une couverture exacte car autofinancée mais plutôt d'une *surcouverture* encore appelée *couverture avec consommation*. En effet, tant que la frontière d'exercice n'a pas été franchie, la prime  $U_0$ , investie dans un portefeuille de couverture, gérée de façon dynamique comme pour la couverture d'une option européenne, fournit une couverture exacte en ce sens que la valeur du portefeuille à chaque instant est exactement égale à la valeur de l'option américaine. Une fois la frontière d'exercice franchie (si cela a lieu), il y a deux possibilités. Soit le détenteur de l'option l'exerce, il récupère le pay-off et l'option cesse d'exister. Soit il n'exerce pas (il n'a pas noté le franchissement de la frontière d'exercice, ou il a mieux à faire) et dans ce cas le vendeur peut constituer son portefeuille de couverture à un prix strictement inférieur au pay-off et réalise un gain aux dépens du détenteur négligeant. Ce "revenu" durera

aussi longtemps que le prix de l'action restera inférieur à la "frontière d'exercice" et que le détenteur de l'option n'exerce pas son droit, rapportant une richesse strictement positive que l'on désigne sous le nom de consommation et qui restera acquise au vendeur de l'option.

La couverture d'une option américaine est donc une *surcouverture* qui peut soit être une simple couverture (exacte) soit générer une consommation, selon les cas.

Il y a une façon simple et élégante de formaliser cette situation au moyen d'un résultat connu sous le nom de *Décomposition de Doob-Meyer*.

**Théorème 6.3** *Soit  $\tilde{U}_t$  une  $\mathcal{F}_t$ -surmartingale. Il existe une marche aléatoire  $A_t$  croissante et prévisible (c'est-à-dire telle que pour tout  $t$   $A_t$  soit  $\mathcal{F}_{t-\delta t}$ -mesurable) telle que*

$$\tilde{U}_t = M_t - A_t$$

où  $M_t$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale. Cette décomposition de  $\tilde{U}_t$  s'appelle sa décomposition de Doob-Meyer.

**Preuve :** La démonstration de ce théorème est particulièrement simple dans le cas discret où nous nous plaçons ici. On définit les deux marches  $A_t$  et  $M_t$  de la façon suivante :

$$A_0 := 0 \quad A_{t+\delta t} := A_t + \mathbb{E}(\tilde{U}_t - \tilde{U}_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t)$$

et

$$M_0 := 0 \quad M_{t+\delta t} := M_t + \tilde{U}_{t+\delta t} - \mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t)$$

Puis on vérifie qu'elles satisfont les propriétés annoncées. Tout d'abord  $A_t$  est croissante car  $\tilde{U}_t$  est une surmartingale, et est prévisible par construction. D'autre part on a :

$$\mathbb{E}(M_{t+\delta t} - M_t / \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) / \mathcal{F}_t) = 0$$

en appliquant simplement la linéarité et la transitivité de l'espérance conditionnelle. D'où le fait que  $M_t$  soit une  $\mathcal{F}_t$ -martingale.  $\square$

Dans le théorème suivant, on note, pour simplifier,  $Z_t$  le pay-off actualisé de l'option américaine.

**Théorème 6.4** *Soit  $Z_t$  un processus adapté à  $\mathcal{F}_t$  et soit  $\tilde{U}_t$  son enveloppe de Snell. Soit  $\tilde{U}_t = M_t - A_t$  la décomposition de Doob-Meyer de  $\tilde{U}_t$ . Alors le temps d'arrêt optimal  $\tau_0$  défini par  $\tau_0 = \text{Min}\{s \in [0..T]_{\delta t} \text{ , } U_s = Z_s\}$  est égal au temps d'arrêt  $\tau_A = \text{Min}\{s \in [0..T]_{\delta t} \text{ , } A_{s+\delta t} \neq 0\}$  si  $A_T \neq 0$  et  $\tau_0 = T$  sinon.*

Ce théorème affirme donc que le temps d'arrêt optimal, c'est à dire l'instant d'exercice optimal pour le détenteur, est le premier instant où le processus croissant  $A_t$  cesse d'être nul. Ce processus apparaît donc comme représentant précisément la consommation. En effet, dès que la frontière d'exercice est franchie, si le détenteur n'exerce pas l'option, la valeur de l'option cesse d'être la valeur d'un portefeuille autofinancé et commence à générer une consommation égale au processus croissant  $A_t$ . C'est cette consommation qui fait de l'option américaine une surmartingale (et non une martingale comme l'option européenne) et du portefeuille de couverture une surcouverture (et non une couverture exacte comme pour l'option européenne).

**Preuve :** La preuve montre successivement que  $\tau_A \geq \tau_0$  et que  $\tau_A \leq \tau_0$ .

– Soit  $t \in [0..T]_{\delta t}$ . Sur  $\{\tau_A = t\}$ ,  $A_t = 0$  et  $A_{t+\delta t} \neq 0$ . Donc  $\tilde{U}_t = M_t - A_t = M_t$  et  $\tilde{U}_{t+\delta t} = M_{t+\delta t} - A_{t+\delta t} < M_{t+\delta t}$ . Donc

$$\mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) < \mathbb{E}(M_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t) = M_t = \tilde{U}_t.$$

Comme  $\tilde{U}_t = \text{Max}\{Z_t, \mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t} / \mathcal{F}_t)\}$ , ceci entraîne que  $\tilde{U}_t = Z_t$ . Donc, par définition de  $\tau_0$ ,  $\tau_A \geq \tau_0$ .

– Soit  $s \in [0..T]_{\delta t}$ . Sur  $\{\tau_0 = s + \delta t\}$ ,  $U_{s+\delta t} = Z_{s+\delta t}$  et  $\tilde{U}_s > Z_s$ . Donc, comme  $A_t$  est prévisible,

$$\tilde{U}_s = \mathbb{E}(\tilde{U}_{s+\delta t} / \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(M_{s+\delta t} - A_{s+\delta t} / \mathcal{F}_s) = M_s - A_{s+\delta t} = \tilde{U}_s + A_s - A_{s+\delta t}$$

Donc  $A_{s+\delta t} = A_s$ , d'où  $\tau_A \leq \tau_0$ .  $\square$