NOM : Corrigé
PRENOM :

Date : 15 Février 2012

Finance mathématique : feuille de réponses du TP 4
Prix d'une option comme espérance conditionnelle du payoff et volatilité implicite

L'objet de cette séance est de calculer dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein à n étapes le prix d'une option Call de payoff $\varphi(S) = (S-K)^+$ non plus au moyen d'une récurrence rétrograde mais comme une espérance du payoff actualisé. Nous verrons ensuite à quoi correspond la volatilité implicite.

Comme précédemment, on modélise les prix par une marche aléatoire S_t définie par $S_0 = S0$ et $S_{t+\delta t} = S_t U_t$, avec $U_t \in \{\mathtt{up},\mathtt{down}\}$, en introduisant la notation $S(i,j) = SS(i+1, j+1)$ pour représenter la valeur de l'actif S_t à l'instant $t = i\delta t$ s'il y a eu j up depuis l'instant $t = 0$. On pose :

$$n = 100 \quad T = 1 \quad \delta t = T/n \quad up = e^{+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad down = e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \sigma = 0.4 \quad S_0 = 120 \quad r = 0.1 \quad R = e^{r\delta t}.$$

On veut calculer la prime d'un Call à la monnaie sur l'actif S_t en utilisant la formule $C(0,0) = \mathbb{E}(\varphi(S(n,J))/R^n$, où J est une variable aléatoire qui suit une loi binômiale : $\mathbb{P}(\{J=k\}) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$, avec $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n\,!}{k\,!(n-k)\,!}$.

Exercice 1. :

1. Reprendre tout d'abord les codes des TP précédents permettant de calculer la marche S_t et la marche C_t avec les constantes ci-dessus. Les exécuter. Préciser à quoi correspond le vecteur `SS(1+n,1+0 :1+n)`.

   C'est un vecteur de $(n+1)$ composantes correspondant à toutes les valeurs atteintes par S_t après $t = n\delta t$ pas de temps pour $j = 0 .. n$. Les valeurs s'étendent de la plus petite 2,1979 à la plus grande 6551,778.

2. Quelle prime trouvez-vous pour le Call à la monnaie ?

   On trouve Call = 24,335678

3. Expliquer, en vous aidant de l'aide de Scilab, ce que retournent chacune des commandes suivantes :

   `Phi(SS(1+n,1+0 :1+n))`

   C'est un vecteur à $(n+1)$ composantes correspondant au payoff du Call en chaque valeur de S_t dont $(S_t-K)^+$:
   $(0, \ldots\ldots\ldots\ldots 0..9{,}99 \ldots\ldots\ldots 6431{,}778)$
   ← 51e comp.

   `binomial(p,n)`

   Ce vecteur donne les $(n+1)$ valeurs de la distribution binomiale $\mathcal{B}(n,p)$

   `binomial(p,n)'`

   Le " ' " donne le transposé du vecteur : c'est donc la distribution binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ mais en colonne.

   $\underbrace{\mathtt{Phi(SS(1+n,1+0\ :1+n))}}_{\text{vecteur ligne}}*\underbrace{\mathtt{binomial(p,n)'}}_{\text{vecteur colonne}}$: cette quantité est le produit scalaire des 2 vecteurs et il représente l'espérance du payoff. On trouve 26,895083

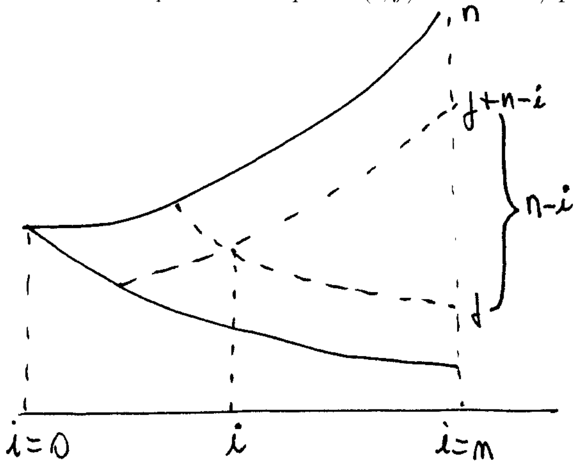
4. En déduire la valeur de la prime du Call à la monnaie et la comparer avec la valeur obtenue ci-dessus.

   Pour obtenir la prime du Call à la monnaie, il faut "actualiser" le produit scalaire précédent (en le mult. par e^{-rT}). On trouve 24,335678 (comme à la question 2 !).

Exercice 2. : Le code suivant permet de calculer le prix d'un Call $C(i,j)$ à la monnaie à un instant $t \in \{0, \delta t, 2\delta t, ...\}$ quelconque et non plus seulement en $t = 0$.

```
C=zeros(n+1,n+1)
C(1+n, :)=Phi(SS(1+n, :)) ;
for i=0 :n-1
      for j=0 :i
      C(1+i,1+j)=(Phi(SS(1+n,1+j :1+j+n-i))*binomial(p,n-i)')/R^(n-i)
      end ;
end ;
```

1. Expliquez pourquoi (on pourra dessiner les points de l'arbre CRR qu'on peut atteindre à l'instant $T = n\delta t$ à partir d'un point (i,j) de l'arbre) puis calculer quelques valeurs de C.

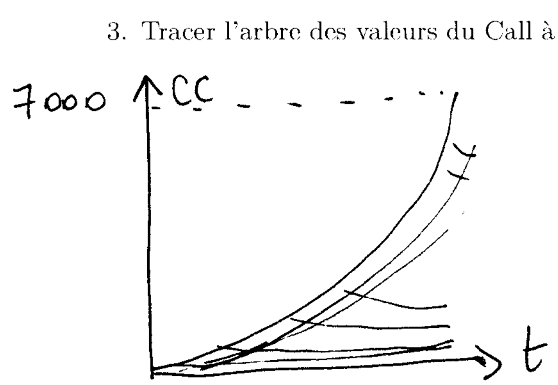


Le prix du Call à un instant $t = i\delta t$ après j up est l'espérance conditionnelle des $(n-i)$ valeurs possibles du payoff $(S_T - K)^+$ qui peuvent être atteintes à l'instant final à partir du noeud (i,j) de l'arbre. Les probabilités sont celles de la distribution $\mathcal{B}(p, n-i)$. Comme il reste $(n-i)$ pas de temps, l'actualisation consiste à multiplier par $(1/R)^{n-i}$.

2. Quelle est la valeur du Call à la monnaie après 50 pas de temps lorsque l'actif sous jacent n'a cessé d'augmenter ?

Après 50 pas de temps, si le sous-jacent n'a cessé d'augmenter, il a fait 50 up, donc $i = 50$ et $j = 50$.
On trouve donc $C(51,51) = 772{,}5392$

3. Tracer l'arbre des valeurs du Call à la monnaie. Qu'observez-vous ?

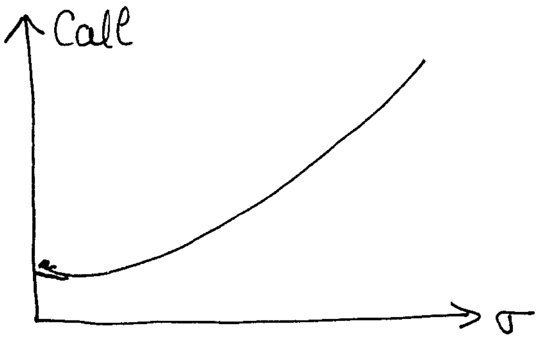


On reprend le code Scilab utilisé au TP1 (en remplaçant WW par CC).
L'arbre obtenu ressemble à celui de CRR : les valeurs finales s'étalent entre 0 et près de 7000.

Exercice 3. : Le code suivant permet de tracer la courbe donnant la prime du Call à la monnaie en fonction de la volatilité σ de l'actif sous-jacent.

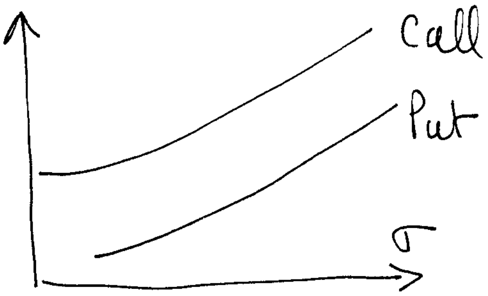
```
function up=upsigma(sigma);
up=exp(sigma/sqrt(n));
endfunction;
function down=downsigma(sigma);
down=1/upsigma(sigma);
endfunction;
function p=psigma(sigma);
p=(R-downsigma(sigma))/(upsigma(sigma)-downsigma(sigma));
endfunction;
function S=S(i,j,sigma); // 0<=j<=i<=n
S=S0*upsigma(sigma).^j.*downsigma(sigma).^(i-j);
endfunction;
delta_sigma=0.01;sigmamax=0.5;
for s=1 :sigmamax/delta_sigma
CALL(s)=exp(-r*T)*(phi(S(n,0 :n,s*delta_sigma))*..
          binomial(psigma(s*delta_sigma),n)');
end;
plot2d(delta_sigma :delta_sigma :sigmamax,CALL)
```

1. Indiquer l'allure du graphe obtenu.



On observe que le prix du Call est une fonction strictement croissante de la volatilité. (Elle est donc inversible)

2. Tracer sur la même figure le graphe correspondant pour la valeur du Put à la monnaie. L'écart entre les deux courbes semble constant. Pouvez-vous l'expliquer ?



L'écart entre le Call et le Put est donné par la relation de parité Call-Put :

$$C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}$$

On voit que l'écart ne dépend pas de σ, ce qui explique qu'il reste constant.

3. Déterminer graphiquement la volatilité implicite du sous-jacent si le prix du Call à la monnaie est 30. Même question pour 20. Voyez-vous comment la calculer avec la commande `fsolve` de Scilab ?