Université de Nice
EPU-Nice
NOM :
PRENOM :

Corrigé

Date :
Groupe :

Année 2009-2010
MMDFA

Feuille-réponses du TD 2
Modèles pour le micro-crédit

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1. : Taux pratiqué pour le micro-crédit : exemple de Muhammad Yunus (Prix Nobel de la Paix 2006) : La banque Grameen prête aux plus démunis dans les conditions suivantes : pour un prêt de 1000 Bangladesh Taka (BDT) l'emprunteur rembourse chaque semaine durant 50 semaines la somme de 22 BDT.

1. Quelle est la somme totale remboursée ? Quel pourcentage de la somme prèté a-t-on remboursé en sus ?

Somme totale remboursée : $50 \times 22 = 1100$ pour 1000 prêtés
Il y a donc 100 BDT qui ont été payés en sus, soient $\frac{100}{1000} = 10\%$

2. On note r le "taux d'intérêt continu annuel" pratiqué, c'est-à-dire que pour 1 emprunté il faut rembourser e^{rT} après un temps T exprimé en année, et donc $e^{r\frac{k}{52}}$ après k semaines. On pose $q = e^{-\frac{r}{52}}$. A la date d'emprunt les 22 BDT payés en semaine k représente une part égale à $x_k := 22q^k$ BDT sur le montant total emprunté. Expliquer pourquoi.

règle de trois : $e^{+r\frac{k}{52}}$ en semaine k remboursent (avec intérêts) 1 emprunté à $t=0$
1 ——— $1/e^{+r\frac{k}{52}} = e^{-r\frac{k}{52}}$ ———
22 ——— $22\, e^{-r\frac{k}{52}} =: x_k$ ———

3. Si les remboursements commencent après une semaine alors $1000 = 22\sum_{k=1}^{50} q^k$. Pourquoi ?

La somme des 50 paiements remboursent les 1000 empruntés, donc
$$1000 = \sum_{k=1}^{50} x_k = \sum_{k=1}^{50} 22q^k = 22\sum_{k=1}^{50} q^k$$

4. On rappelle que $(1+x+\ldots+x^{n-1})(1-x) = 1 - x^n$. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x(1-x^n)}{1-x}$

On a $\sum_{k=1}^{n} x^k = x + x^2 + \ldots + x^n = x(1+x+\ldots+x^{n-1}) = x\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x(1-x^n)}{1-x}$

5. En déduire que $22q^{51} - 1022q + 1000 = 0$

On applique (4.) à (3.) pour $x=q$ et $n=50$; on a donc
$$1000 = 22\sum_{k=1}^{50} q^k = 22\,\frac{q(1-q^{50})}{1-q}$$
$$\Leftrightarrow 1000(1-q) = 22q(1-q^{50})$$
$$\Leftrightarrow 1000 - 1000q = 22q - 22q^{51} \Leftrightarrow 22q^{51} - 1022q + 1000 = 0$$

CQFD

6. Que savez-vous du problème de résoudre l'équation $22q^{51} - 1022q + 1000 = 0$

Cette équation est une équation polynomiale de degré supérieur à 4. Il n'existe donc pas de formule générale pour ce type d'équations (théorie d'Evariste Galois (1811-1832)) Mais une solution approchée nous suffit complement; on peut donc utiliser une méthode d'Analyse Numérique, par exemple la méthode par dichotomie, la méthode de la fausse position, ou encore la méthode de Newton (voir Wikipédia)

7. Voici la manière de trouver toutes les solutions, réelles on complexes, sous Scilab :

```
q=poly(0,"q"); //q devient le polynome à une seule racine, 0.
[sols]=roots(22*q^51-1022*q+1000);
```

Que vaut la solution q de l'équation $22q^{51} - 1022q + 1000 = 0$?

Le code indiqué affecte à la variable sols la liste des 51 solutions. On fait afficher cette liste en tapant "sols [entrée]" dans la fenêtre "console", ou sols(1), ..., sols(51).
On voit que $q = 0{,}9962107..$ est la seule solution réelle positive différente de 1.

8. Quel est le taux r pratiqué par la banque Grameen ? Dans mon cas, c'est sols(15)

$q = e^{-\frac{r}{52}}$ donc $\log(q) = \log(e^{-\frac{r}{52}}) = -\frac{r}{52}$ d'où $r = -52\log(q)$

On trouve $r = -52 * \log(\text{sols}(15)) = 0{,}1974175.. = 19{,}74175..\,\%$

9. A ce taux, combien faudrait-il payer après un an (en une seule fois) pour 1000 BDT empruntés ?

Après 1 an (ou $t=1$) il faudrait payer $1000 \cdot e^{r}$; on trouve
ApresUnAn = 1000 * exp(r) = 1218,2526.. soient 218,25.. de plus que la somme empruntée (intérêts = 21,82 %)

10. Pour financer l'achat d'un ordinateur valant 1000 EUR, on vous propose de rembourser 30 EUR par mois durant 36 mois en commençant les remboursements après un mois. Poser $p = e^{-\frac{r}{12}}$. Donner l'équation satisfaite par p. Donner la valeur de p calculée au moyen de Scilab, puis répondre aux deux questions : quel est le taux continu r pratiqué ? A ce taux, combien faudrait-il payer au terme des 36 mois ?

En refaisant le même raisonnement on trouve que $30p^{37} - 1030p + 1000 = 0$
p = poly(0,"p"); [solsp] = roots(30*p^37 - 1030*p + 1000) qui me donne la solution cherchée en solsp(8) = 0,9957971, d'où
rp = -12 * log(solsp(8)) = 0.0505414 = 5,05414 %
ApresTroisAns = 1000 * exp(3 * rp) = 1163,72

Exercice 2. : Actualisation

On note toujours r le taux d'intérêt continu annuel. Du fait que 1 vaudra e^{rt} à la date t, une somme S_t à la date t vaut $S_t/e^{rt} = S_t e^{-rt}$ à la date 0 : on dit que $\tilde{S}_t := S_t e^{-rt}$ est la "valeur actualisée" de S_t. Calculer les valeurs `SStilde(i+1,j+1)`$= \tilde{S}(i,j) = \tilde{S}_t$ pour $t = i\delta t$ du modèle de Cox-Ross-Rubinstein du TD 1, pour $r = 20\%$, $T = 1$, et $n = 100$. Quelles valeurs extrémales (minimale et maximale) trouvez-vous pour $\tilde{S}_1$?

On pose R = exp(r * deltat) = 1.002002 (donc $e^{-rt} = e^{-ri\delta t} = 1/R^{\wedge}i$)
SStilde(1,1) = SS(1,1) = S0
puis SStilde(i+1,j+1) = SStilde(i,j) * up / R
les plus petites et plus grandes valeurs sont à la fin (i = n = 100) pour j = 0 et j = 100
On trouve SStilde(101,1) = 2.0993808.. et SStilde(101,101) = 6258.1658
nb : on peut aussi utiliser SStilde(i+1,j+1) = SS(i+1,j+1)/R^i