Corrigé

Université de Nice
Département de Mathématiques
NOM :
PRENOM :

Groupe :

L3 MASS
Calcul Stochastique appliqué la finance
Date : 7 mars 2012

Feuille de réponses du TD 6
Calcul du prix d'une option barrière

On reprend les notations des TP précédents, avec les constantes suivantes $n = 100$, $T = 1$, $\sigma = 0.4$, $S_0 = 140$ et $r = 0.05$.

Exercice 1. : Créer un nouveau code Scilab en commençant par y recopier la définition de SS et celle de CC utilisée dans les TP précédents. Avant de l'exécuter, modifier les valeurs des constantes.

Combien vaut l'actif sous-jacent après 12 "down" ? Combien après 7 "down" et 5 "up" ? Combien vaut le Call à la monnaie ($K = S_0$) à l'instant t=0 ? Combien vaut-il à l'instant $t = \frac{1}{2}$ si l'actif sous-jacent n'a eu que des "down" ?

En se souvenant que i est le nb de pas de temps et j le nb de up, et que $SS(i+1,j+1) = S(i,j)$ et de même pour CC, on trouve les valeurs suivantes :

$SS(13,1) = 86,63$ $\quad SS(13,6) = 129,24$
$CC(1,1) = 25,18$ $\quad CC(51,1) = 0$

Exercice 2. : On rappelle qu'une option DIC est une option Call qui ne prend sa valeur à l'instant final T que si le cours de l'actif sous-jacent est passé en dessous d'une barrière.

Pour calculer la valeur d'une option DIC (on prendra ici la barrière égale à $L = 130$), on va utiliser, comme pour un Call vanille, sa définition $DIC_0 = \mathbb{E}\left(\varphi(S_T)\mathbb{I}_{\tau_L<T}\right)$ en programmant le calcul de cette espérance par récurrence retrograde. Pour prendre en compte l'indicatrice $\mathbb{I}_{\tau_L<T}$, on ajoute aux deux variables i et j usuelles une troisième variable notée k qui vaut 0 ou 1 selon qu'on envisage que $\mathbb{I}_{\tau_L<t}$ vaut 0 ou 1. La fonction `sousL(i,j)` est une fonction qui vaut 1 lorsqu'on est sous la barrière et 0 si l'on est au dessus. On l'utilise de la façon suivante : en $t = T$, l'option vaut $\varphi(S_T)$ lorsque $k = 1$ et elle vaut 0 sinon. Donc

$$DIC(n,j,1) = \varphi(S(n,j)) \ , \quad DIC(n,j,0) = 0.$$

Lorsque $t < T$, l'option est égale à l'espérance actualisée de ses deux valeurs suivantes (comme pour un Call vanille) et la troisième variable k est egale à 1 à 0 selon qu'on suppose que la barrière a déjà été franchie ou non. On a donc :

$$DIC(i,j,k) = e^{-rT}\left(pDIC(i+1,j+1,k') + (1-p)DIC(i+1,j,k'')\right)$$

où $k' = \max(k, \mathtt{sousL}(\mathtt{i}+1,\mathtt{j}+1))$ et $k'' = \max(k, \mathtt{sousL}(\mathtt{i}-1,\mathtt{j}))$.

1. Saisir le code correspondant (voir notes du cours) et en déduire la valeur de la prime de l'option DIC. Dupliquer puis modifier votre code pour qu'il calcule cette fois la prime de l'option DIP. Indiquer les valeurs trouvées.

On trouve les 2 valeurs suivantes :
$DIC(1,1,1) = 14,18$ et $DIP(1,1,1) = 18,35$

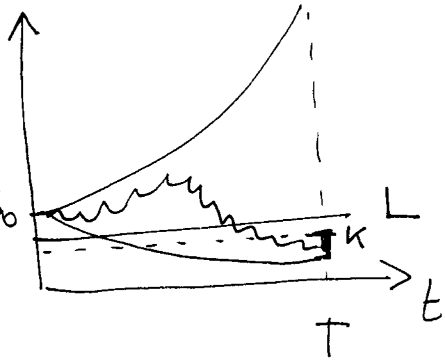
2. Vérifier que DIC(1,1,2)=Call. Expliquer pourquoi.

On a bien DIC(1,1,2) = CC(1,1) - En effet, lorsque k = 1, cela signifie que la trajectoire a déjà franchi la barrière. Si c'est le cas en t=0, (puisque i+1 = 1), alors cela signifie qu'on suppose que toutes les trajectoires ont déjà franchi la barrière dès le départ, l'option DIC est toujours "In" et donc son prix est le même que celui de l'option vanille correspondante.

3. Calculer le prix de l'option DIP lorsque $K = 120$ (en gardant $L = 130$ et $S_0 = 140$) et comparer avec le prix du Put. Expliquer pourquoi on aura toujours DIP=Put lorsque $K < L < S_0$.

Lorsque K = 120, on a bien DIPP(1,1,1) = PP(1,1) = 9,71

Comme l'indique le shéma, toute trajectoire ayant un payoff non nulle (telle que $S_T < K$) devra nécessairement franchir la barrière H dès que $K < L < S_0$.



4. Expliquer pourquoi la relation DIP+DOP=Put est vraie en $t = T$ et pourquoi elle reste vraie pour tous $t < T$ et donc en $t = 0$. Même question pour la relation DIC+DOC=Call.

Cette relation est vraie en t=T car chaque trajectoire a soit franchi, soit n'a pas franchi la barrière lorsque t atteint T. Donc toute trajectoire apporte un payoff qui contribue soit à DIP soit à DOP Le Pay off de DIP+DOP est donc le même que celui du Put.
On peut alors raisonner par AOA pour affirmer que les 2 contrats DIP+DOP et Put ayant la même valeur finale doivent avoir la même valeur aussi pour tout $0 \leq t \leq T$.

5. Dupliquer puis modifier votre code pour qu'il calcule le prix des options DOC et DOP cette fois. Vérifier expérimentalement les relations indiquées à la question précédente, en testant le résultat pour différentes valeurs de t.

Pour calculer le prix d'une option DOC, on modifie la condition terminale de la récurrence rétrograde:

```
if k==0, then DOCC(n+1,j+1,k+1)=phi(SS(n+1,j+1));
else DOCC(n+1,j+1,k+1)=0; end;
```

On trouve DOCC(1,1,1) = 10,99 et DICC(1,1,1) = 14,18. On avait CC(1,1) = 25,17, d'où l'égalité.
En $t = \frac{1}{2}$ (par exemple), si l'on a eu que des down, on observe que DICC(51,1,1) + DOCC(51,1,1) = CC(51,1)