Chapitre 2

Prix et couverture d'une option

Dans cette leçon, on explique comment on peut calculer le prix d'un contrat d'option en évaluant celui d'un portefeuille de couverture de cette option.

Définition : Une *option* d'achat (européenne), *encore appelée call*, est un titre donnant droit à son détenteur d'acheter un actif financier à une date future et à un prix fixé. Il s'agit d'un droit et non d'une obligation. Le prix fixé s'appelle le *prix d'exercice* de l'option et la date de fin du contrat la *date d'échéance* ou *date d'exercice*. L'actif financier sur lequel porte le contrat s'appelle l'*actif sous-jacent.*

Le propre d'un contrat d'option, tient à ce qu'à la date de souscription, la valeur à l'échéance de l'actif sous-jacent n'est pas connue mais le paiment que pourra exiger le détenteur de l'option, s'il exerce l'option, dépend de cette valeur à l'écheance. C'est pourquoi on appelle aussi les options des *contrats contingents.* On peut comprendre, dans un premier temps, un tel contrat comme un contrat d'assurance : le vendeur de l'option est l'assureur, l'acheteur l'assuré, ce dernier cherchant à se couvrir contre une envolée de la valeur du sous-jacent. Il s'agit alors d'un contrat de transfert de risque moyennant un prix. Mais nous verrons plus loin qu'il y a une différence essentielle entre un contrat d'assurance classique (assurance habitation ou automobile) et un contrat d'option.

L'exemple le plus naturel d'actif financier est sans doute celui d'une action cotée en bourse, comme l'action Micsft ou Netscp sur le NASDAQ ou AmOnLne sur le NYSE. Mais cela peut aussi être le cours d'une matière première comme le prix d'une tonne de zing ou celui d'un produit agricole tel le prix de 50.000 livres de boeuf. Les premiers contrats d'option étaient des contrats sur cours agricoles déjà courants au siècle dernier. Les contrats d'option sur actions se sont vraiment développés lorsqu'ils ont pu faire l'objet d'une négociation en bourse, c'est-à-dire à partir des années 70 sur le CBOT, à Chicago, puis progressivement dans la plupart des autres places financières.

2.1 Evaluation du prix dans un modèle CRR à une étape

Pour évaluer le prix d'une option d'achat à l'instant initial, c'est-à-dire la somme à verser par l'acheteur au vendeur, plaçons nous tout d'abord dans un cas très simple : nous supposerons que l'actif sous jacent suit un modèle CRR à une seule étape ($n = 1$) c'est-à-dire que $t = 0$ à l'instant de souscription de l'option et $t =_d eltat = T$ à son échéance. Notons K son prix d'exercice et supposons en outre que $S_0d < K < S_0u$. Soit C_0 la valeur, à déterminer, du call à l'instant $t = 0$; c'est le prix du contrat, ou la *prime.* A l'instant initial le vendeur ne sait pas si S_T prendra la valeur S_0u ou S_0d, mais il peut évaluer ce qu'il devra à l'acheteur dans chacun des deux cas : si $S_T = S_0d$, l'acheteur n'exercera pas (puisqu'il peut alors acheter l'actif sous-jacent sur le marché à un prix inférieur à K) et donc la valeur de l'option est nulle ; par contre si $S_T = S_0u$, l'acheteur réclamera au vendeur la différence entre le prix de marché et le prix convenu K, soit $S_0u - K$, somme lui permettant d'effectuer son achat à ce prix. Comment le vendeur peut-il, avec la prime qu'il a reçue, faire face à ses engagements ? L'idée est d'utiliser la prime pour constituer un portefeuille, appelé *portefeuille de couverture* Π, composé de a actifs S_0 et de b unités monétaires, et de choisir sa composition a et b de telle façon que sa valeur à l'échéance soit précisément celle de l'option, c'est-à-dire 0 si $S_T = S_0d$ et $S_0u - K$ si $S_T = S_0u$. . Si l'on désigne par r le taux d'intérêt monétaire, la *composition du portefeuille* (a, b) devra donc vérifier les deux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} aS_0u + be^{rT} & = & S_0u - K \\ aS_0d + be^{rT} & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.1}$$

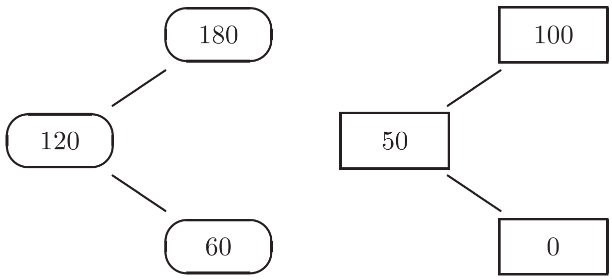

FIGURE 2.1 – Un exemple de modèle à une étape

On résout facilement ce système (système linéaire de deux équations à deux inconnues a et b) et on déduit des valeurs de a et b obtenues la valeur du portefeuille à l'instant initial $\Pi_0 = aS_0 + b$. On peut alors donner à C_0 la valeur $C_0 = \Pi_0$.

Exemple : Par exemple, si $S_0 = 120$, $u = 1,5$, $d = 0,5$, $r = 0$, et $K = 80$, la résolution du système (2.1) donne $a = \frac{5}{6}$, $b = -50$ et donc $\Pi_0 = 50$. Cela signifie que, ayant touché la prime fixée à $C_0 = 50$, le vendeur emprunte 50 (car $b = -50$) et achète $a = \frac{5}{6}$ de S_0 (au prix 100) ; à l'échéance, son portefeuille vaudra soit $150 = \frac{5}{6}180$, si $S_T = S_0u$, et il paiera alors $100 = 180 - 80$ au détenteur du call et remboursera les 50 empruntés (sans interêts puisqu'on a supposé $r = 0$), soit il vaudra $50 = \frac{5}{6}60$, si $S_T = S_0d$, ce qui, compte tenu du fait que le détenteur du call ne viendra pas l'exercer, lui permet de rembourser les 50 empruntés.

Remarque : Notons que pour que le problème admette une solution, il suffit que le système (2.1) admette une solution, ce qui est assuré dès que $u \neq d$, ce qui est précisément l'origine du sens du contrat : si l'actif sous-jacent n'avait qu'un seul prix à $t = T$, il n'y aurait pas besoin de souscrire d'option !

Remarque : Le raisonnement précédent se généralise facilement à d'autres contrats d'option ; par exemple pour un contrat d'option qui donne le droit de vendre au prix K (au lieu du droit d'acheter), appelé un *put*, sa valeur à l'échéance sera $K - S_0d$ si $S_T = S_0d$ et 0 si $S_T = S_0u$. Plus généralement, si l'on désigne par $C_T = \varphi(S_T)$ le prix du contrat d'option à l'instant T, la résolution du système (2.1) dans ce cas montre que la composition du portefeuille en actif sous-jacent sera donnée par

$$a = \frac{\varphi(S_0u) - \varphi(S_0d)}{S_0u - S_0d} \tag{2.2}$$

Les praticiens désignent ce quotient sous le nom de *delta de couverture* (ou simplement *delta*). Il désigne la quantité d'actifs sous-jacent qu'il faut avoir dans son portefeuille si l'on veut couvrir l'option.

2.2 Modèle à deux étapes : couverture dynamique.

La seule idée du portefeuille de couverture (a, b) constitué à l'instant initial ne suffit plus si l'option peut prendre trois valeurs à l'échéance (parce que l'actif sous-jacent en prendrait trois). Par contre, si l'on ajoute la possibilité de modifier, à une date intermédiaire (entre $t = 0$ et $t = T$) la composition du portefeuille constitué à la date initiale, en tenant compte de la valeur S_t du sous-jacent à cette date, on peut trouver une solution à ce problème : c'est l'idée de la couverture dynamique.

Considérons un modèle à deux étapes de l'actif sous-jacent : $t \in \{0, \delta t, 2\delta t = T\}$ et (S_t) prenant la valeur S_0 à l'instant initial, l'une des deux valeurs $S_{\delta t} = S_0d$ ou $S_{\delta t} = S_0u$ à l'instant intermédiaire $t = \delta t$ et l'une des trois valeurs $S_T = S_0d^2$, $S_T = S_0ud$ ou $S_T = S_0u^2$ à l'échéance. Pour déterminer la valeur d'un portefeuille de couverture d'une option $C_T = \varphi(S_T)$, raisonnons en partant de sa valeur Π_T à l'échéance, qui est connue puisque, pour *couvrir* l'option il devra valoir $\Pi_T = \varphi(S_T)$, somme due en $t = T$ par le vendeur à l'acheteur de l'option. Il y a trois possibilités pour cette valeur, selon les valeurs prises par S_T. En utilisant la même méthode que dans le cas d'un modèle à une étape, on peut calculer les deux valeurs $\Pi_{\delta t} = a_{\delta t}S_{\delta t} + b_{\delta t}$ que devra prendre le portefeuille à l'instant $t = \delta t$, selon que $S_{\delta t} = S_0d$ ou $S_{\delta t} = S_0u$. Pour cela, il suffit de résoudre les deux systèmes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} aS_0u^2 + be^{r\delta t} & = & \varphi(S_0u^2) \\ aS_0ud + be^{r\delta t} & = & \varphi(S_0ud) \end{array} \right. \tag{2.3}$$

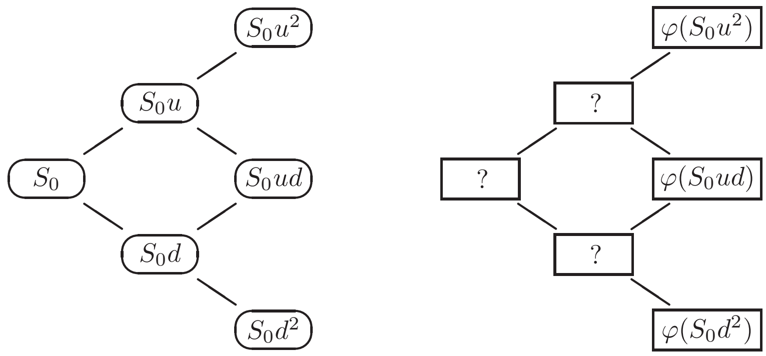

FIGURE 2.2 – Quelles valeurs donner à l'option aux instants $t = \delta t$ et $t = 0$?

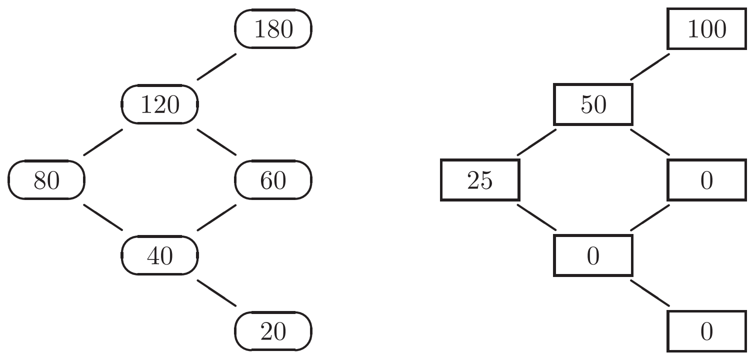

FIGURE 2.3 – Deux pattes-d'oie : la première représente l'évolution sur deux étapes d'un actif à dynamique stochastique binaire, avec $S_0 = 80$ et $S_{t+\delta t} = S_t(1 \pm 0.5)$; la seconde celle du portefeuille de couverture d'un call sur cet actif de prix d'exercice $K = 80$.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} aS_0ud + be^{r\delta t} & = & \varphi(S_0ud) \\ aS_0d^2 + be^{r\delta t} & = & \varphi(S_0d^2) \end{array} \right. \tag{2.4}$$

Désignons par $\Pi^u_{\delta t}$ et $\Pi^d_{\delta t}$ les deux valeurs de $\Pi_{\delta t} = a_{\delta t}S_{\delta t} + b_{\delta t}$ obtenues en remplaçant d'une part $(a_{\delta t}, b_{\delta t})$ par la solution du système (2.3) et $S_{\delta t}$ par S_0u et d'autre part $(a_{\delta t}, b_{\delta t})$ par la solution du système (2.4) et $S_{\delta t}$ par S_0d. Pour obtenir la valeur cherchée du portefeuille à l'instant initial, qui sera comme précédemment la valeur initiale de l'option (ou prime), il reste alors simplement à résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} aS_0u + be^{r\delta t} & = & \Pi^u_{\delta t} \\ aS_0d + be^{r\delta t} & = & \Pi^d_{\delta t} \end{array} \right. \tag{2.5}$$

Exemple : Soit un titre valant $S_0 = 80$ et changeant deux fois de prix avant l'échéance en $T = 2\delta t$. Observons que dans l'exemple précédent nous avions, à $t = \delta t$, $S_{\delta t} = S_0(1 + \frac{1}{2})$ ou $S_{\delta t} = S_0(1 - \frac{1}{2})$. Supposons qu'ici S suive un processus analogue :

$$S_{\delta t} = S_0(1 \pm \tfrac{1}{2}) \ , \ S_{2\delta t} = S_{\delta t}(1 \pm \tfrac{1}{2}).$$

Cela donne pour cet actif la dynamique indiquée figure 2.2 :

$$S_0 = 80 \quad \text{devient} \quad S_{\delta t} = 120 \text{ ou } S_{\delta t} = 40 \tag{2.6}$$

$$S_0 = 120 \quad \text{devient} \quad S_{2\delta t} = 180 \text{ ou } S_{2\delta t} = 60 \tag{2.7}$$

$$S_0 = 40 \quad \text{devient} \quad S_{2\delta t} = 60 \text{ ou } S_{2\delta t} = 20 \tag{2.8}$$

Soit une option call de date d'exercice $T = 2\delta t$ et prix d'exercice $K = 80$ (lorsque $K = S_0$, on dit que c'est une option "à la monnaie"). On suppose, pour simplifier, que le taux d'intéret monétaire r est ici égal à 0.

Observons que si $S_{\delta t} = 120$ nous retrouvons l'exemple précédent et comprenons que le portefeuille de couverture, dans ce cas (c'est-à-dire si $S_{\delta t} = 120$), doit valoir

$$\Pi^u_{\delta t} = 50.$$

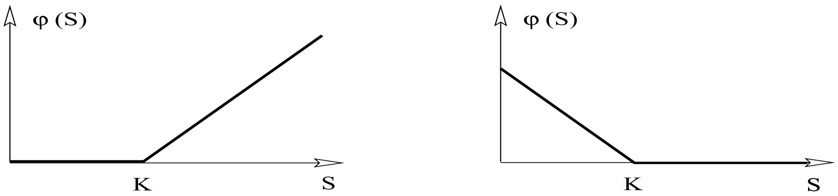

FIGURE 2.4 – Fonction de paiement (ou pay-off) d'un call et d'un put : l'option call est l'option qui assure à son détenteur de pouvoir *acheter*, à la date d'échéance T, l'actif S à un prix maximal K. Si $S_T \leq K$, l'option aura donc une valeur nulle pour $t = T$. Si $S_T > K$, l'option vaudra $S_T - K$ pour $t = T$, c'est-à-dire la différence entre le prix maximal convenu K et le prix effectif S_T de l'actif à la date T. Pour une option call, on a donc $\varphi_{Call}(s) = (s - K)^+$, où x^+ vaut x si $x > 0$ et 0 sinon. L'option put assure à son détenteur de pouvoir *vendre*, à la date T, l'actif S au prix minimum K. En examinant successivement les cas $S_T \geq K$ et $S_T < K$, il est facile de voir que $\varphi_{Put}(s) = (K - s)^+$. Le nombre K s'appelle le *prix d'exercice* (ou *strike*) de l'option.

Qu'en est-il si $S_{\delta t} = 40$? Inutile de faire des calculs : les deux seules possibilité à venir pour $S_{2\delta t}$ sont 60 ou 20. Comme ces deux valeurs sont inférieures au prix d'exercice $K = 80$, on aura dans les deux cas $\varphi(S_{2\delta t}) = 0$, et donc $a_{\delta t} = b_{\delta t} = \Pi_{\delta t} = 0$ puisqu'il n'y a plus rien à couvrir dans ce cas.

A l'instant $t = 0$ le portefeuille de couverture (a_0, b_0) doit satisfaire $a_0 S_{\delta t} + b_0 = \Pi_{\delta t}$, c'est-à-dire vérifier le système

$$\begin{cases} a_0 120 + b_0 &= a_0 S_0 u + b_0 = 50 \\ a_0 60 + b_0 &= a_0 S_0 d + b_0 = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

On trouve immédiatement $a_0 = \frac{5}{8}$ et $b_0 = -25$ d'où $\Pi_0 = \frac{5}{8}80 - 25 = 25$. Le vendeur de l'option, dont le prix est $\Pi_0 = 25$, touche cette prime à l'instant initial, y ajoute un montant de 25 qu'il emprunte, le tout servant à acheter $\frac{5}{8}$ d'actifs à 80 pièce. Si, pour $t = \delta t$, l'actif sous-jacent a évolué à la baisse et que $S_{\delta t} = 40$, *on solde* le portefeuille ; la part en actifs ne vaut plus que $a_0 S_{\delta t} = \frac{5}{8}40 = 25$, soit exactement de quoi rembourser la dette $b_0 = 25$. Si, pour $t = \delta t$, l'actif sous-jacent a évolué à la hausse et que $S_{\delta t} = 120$, nous avons vu dans l'exemple précédent que le portefeuille doit à présent comporter $a_{\delta t} = \frac{5}{6}$; comme il y a déjà $\frac{5}{8}$ d'actifs dans le portefeuille, il convient d'en *racheter* $\frac{5}{6} - \frac{5}{8} = \frac{10}{48}$ au prix unitaire $S_{\delta t} = 120$, donc pour une valeur de $\frac{10}{48}120 = 25$, que l'on emprunte, ce qui porte la dette totale à $25 + 25 = 50$, comme dans le premier exemple, bien entendu. Le vendeu a ainsi modifié la composition de son portefeuille de couverture (sans changer sa valeur) de telle sorte qu'à l'échéance sa valeur soit exactement celle de l'option (100, 0, ou 0 selon les valeurs de $S_{2\delta t}$) : c'est le principe de la couverture dynamique.

Il est utile également d'observer ce qui se passe si le vendeur de l'option ne la couvre pas, soit qu'il n'achète aucun portefeuille de couverture avec la prime, soit qu'il achète bien, à la date initiale, le portefeuille (a_0, b_0) adapté mais ne le réajuste plus avant l'échéance. Examinons la question dans le cas de l'exemple : avec 5/8ième d'actif S_t et une dette de 25, le portefeuille acheté à la date initiale vaut à la date finale, si sa composition n'a pas été modifié dans l'intervalle, respectivement :

— $\frac{5}{8}180 - 25 = 87,5$, si le sous-jacent prend la valeur 180 ; or le vendeur doit dans ce cas 100 à l'acheteur.
— $\frac{5}{8}60 - 25 = 12,5$, si le sous-jacent prend la valeur 60 ; mais le vendeur ne doit rien à l'acheteur dans ce cas, il n'a donc pas de problème.
— $\frac{5}{8}20 - 25 = -12,5$, si le sous-jacent prend la valeur 20 ; ici encore le vendeur ne doit rien à l'acheteur mais il garde une dette de 12, 5.

On voit donc sur cet exemple qu'il peut se révéler désastreux de ne pas assurer complètement la couverture dynamique.

2.3 Prix de l'option dans le cas général

On considère un call européen, souscrit sur l'actif $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$, d'échéance $T = n\delta t$ (n quelconque) et de prix d'exercice K. Sa valeur à l'instant final (son payoff) est donc

$$C_T = (S_T - K)^+ = \text{Max}\,(S_T - K, 0) \tag{2.10}$$

c'est-à-dire que, si l'actif sous-jacent vaut $S_0 u^j d^{n-j}$ à l'instant final, pour un certain $j \in \{0, \ldots, n\}$, le call vaudra $C_T = (S_0 u^j d^{n-j} - K)^+$ pour ce même j.

Pour calculer, à partir de ces données, le prix du call à l'instant initial nous allons reprendre l'idée développée dans le cas des modèles à une et deux étapes, qui consiste à prendre pour prime de l'option la valeur initiale d'un portefeuille qui couvre l'option, c'est-à-dire dont la même valeur soit précisément celle de l'option à l'instant final. Comme pour le modèle à une ou deux étapes, nous cherchons pour définir le portefeuille Π_t par une relation de récurrence *rétrograde* ("backward") de manière à lier les inconnues Π_0, a_0, et b_0, prix initial et composition initiale, à la donnée de son paye off $(S_T - K)^+$. Cette récurrence se définit de la façon suivante : à toute date t, lorsque le sous-jacent prend la valeur S_t, le portefeuille se compose d'une certaine quantité de sous-jacent S_t, et d'une certaine quantité de placement non-risqué B_t. Comme sa composition a été arrêtée à l'instant $t - \delta t$ (il est commode de dire "la veille"), lorsqu'on ne connaissait que $S_{t-\delta t}$, et qu'elle est restée inchangée jusqu'à la date t, nous choisissons de la noter

$$a =: a_{t-\delta t} \text{ et } b =: b_{t-\delta t}.$$

Ce choix de notation est important. On a donc :

$$\delta\Pi_t = \Pi_t - \Pi_{t-\delta t} = (a_{t-\delta t} S_t + b_{t-\delta t} B_t) - (a_{t-\delta t} S_{t-\delta t} + b_{t-\delta t} B_{t-\delta t}) = a_{t-\delta t}\delta S_t + b_{t-\delta t}\delta B_t \tag{2.11}$$

où δS_t et δB_t sont des notations pour les différences $S_t - S_{t-\delta t}$ et $B_t - B_{t-\delta t}$. On peut alors recomposer le portefeuille, ayant prit connaissance de la valeur atteinte par S_t, mais par construction le portefeuille devra être *autofinancé*, c'est-à-dire que le changement de composition (couverture) intervenant à la date t devra se faire sans apport ni retrait de capitaux, c'est-à-dire en vérifiant la relation :

$$a_{t-\delta t} S_t + b_{t-\delta t} B_t = \Pi_t = a_t S_t + b_t B_t \tag{2.12}$$

Nous reviendrons sur cette *relation d'autofinancement*. On détermine la nouvelle composition de la façon suivante : désignons par S la valeur atteinte par l'actif sous-jacent à l'instant t, par Π ($\Pi := \Pi_t = a_{t-\delta t} S_t + b_{t-\delta t} B_t$) celle correspondante du portefeuille et par B celle de B_t. Deux issues sont possibles pour la valeur du sous-jacent, le "lendemain" Su et Sd, d'où résultent deux valeurs de portefeuille, que nous notons Π^u et Π^d, supposées connues par récurrence. Nous devons donc choisir la nouvelle composition (a, b) comme solution du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} aSu + be^{r\delta t}B &= \Pi^u \\ aSd + be^{r\delta t}B &= \Pi^d \end{aligned}$$

qui se résoud immédiatement en

$$a = \frac{\Pi^u - \Pi^d}{Su - Sd} \text{ et } b = e^{-r\delta t}\frac{\Pi^d u - \Pi^u d}{B(u-d)}. \tag{2.13}$$

On pose alors $a_t = a$ et $b_t = b$ et on en déduit la valeur cherchée Π_t, par la formule $\Pi_t = a_t S_t + b_t B_t$. On a donc la proposition suivante :

Proposition 2.1 *Dans un marché financier $(S_t, B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ où S_t suit un modèle CRR, toute option d'échéance T et de fonction de paiement $\varphi(S_T)$ est* duplicable*, c'est-à-dire qu'il existe un portefeuille autofinancé qui la couvre.*

Preuve : On raisonne par récurence sur le nombre n d'étapes du modèle. On a vu le cas d'un modèle à une étape ; pour un modèle à n étapes, on remarque simplement que, comme S_t prend deux valeurs $S_0 u$ et $S_0 d$ à l'instant δt, ces deux valeurs sont chacunes les valeurs initiales d'un modèle à $n-1$ étapes auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. D'où l'existence de deux portefeuilles de couverture $\Pi^u_{\delta t}$ et $\Pi^d_{\delta t}$ avec lesquels on peut alors calculer Π_0 (et donc C_0) comme dans un modèle à une étape. □

2.4 Probabilité risque neutre et formule fondamentale

Le calcul évoqué, bien que simple dans son principe, est lourd dans sa mise en oeuvre (résolution d'un grand nombre de systèmes d'équations) ? Nous allons voir à présent comment on peut le simplifier grâce à l'introduction d'un formalisme probabiliste.

La remarque cruciale est la suivante : si l'on calcule la valeur du portefeuille $\Pi = aS + bB$ en utilisant les solutions (a, b) trouvées en (2.13), on voit facilement qu'on peut réécrire Π comme une fonction de Π^u et Π^d, sous la forme

$$\Pi = e^{-r\delta t}(p\Pi^u + q\Pi^d), \tag{2.14}$$

si l'on introduit les quantités

$$p := \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d} \text{ et } q := \frac{u - e^{r\delta t}}{u - d}. \tag{2.15}$$

Or il est facile de vérifier que ces quantités sont telles que $p + q = 1$ et que, si l'on suppose, ce que nous ferons désormais, que $0 < d < e^{r\delta t} < u$, ces quantités p et q vérifient aussi $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$. Donc si l'on considère que Π^u et Π^d sont les deux valeurs que peut prendre une v.a. de Bernouilli Π avec $\mathbb{P}(\Pi = \Pi^u) = p$ et $\mathbb{P}(\Pi = \Pi^d) = q$ alors l'équation (2.14) affirme simplement que Π est précisement le produit par le *facteur d'actualisation*, $e^{-r\delta t}$, de l'espérance de cette v.a., c'est-à-dire *l'espérance actualisée* de cette v.a.. Les valeurs p et q ainsi définies se calculent directement en fonction de u, d et r, donc à partir des données du modèle choisi $(S_t, B_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Mais elles ont aussi une autre propriété essentielle : on a en effet

$$S = e^{-r\delta t}(pSu + qSd), \tag{2.16}$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$S_{t-\delta t} = e^{-r\delta t}\mathbb{E}(S_t \text{ connaissant } S_{t-\delta t}).$$

On appelle *probabilité risque-neutre* la probabilité $(p, 1 - p)$ et c'est avec elle que l'on pourra calculer les prix d'options, directement et sans recourir à la résolution d'un grand nombre de petits systèmes linéaires. On la désigne aussi sous le nom de *probabilité de calcul*, ou encore *probabilité de martingale* pour des raisons sur lesquelles nous reviendrons.

La probabilité risque-neutre permet de munir le modèle de l'actif sous-jacent (S_t) d'une structure de *marche aléatoire*, c'est-à-dire que, pour chaque $t \in \mathbb{T}$, les $i + 1$ valeurs $\{S_0u^jd^{i-j}, j = 0, \ldots, i\}$ que peut prendre S_t sont les $i + 1$ valeurs possibles d'une v.a. dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(S_t = S_0u^jd^{i-j}) = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} p^j(1 - p)^{i-j}. \tag{2.17}$$

En effet la valeur $S_0u^jd^{i-j}$ atteinte par S_t correspond à une trajectoire qui présente j "montées" et $i - j$ "descentes" dont la probabilité est $p^j(1 - p)^{i-j}$ si l'on fait l'hypothèse que ces mouvements, à la hausse ou à la baisse, sont indépendants, et il est facile de voir qu'il y a exactement $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ trajectoires qui atteignent cette valeur. La formule (2.17) explique le nom de modèle binomial que l'on donne souvent au modèle Cox-Ross-Rubinstein. On a la proposition suivante que l'on obtient par un raisonnement par récurrence comme dans la preuve de la proposition précédente, en utilisant la relation de récurrence retrograde (2.14) et (2.15), ainsi que les propriétés des coefficients du binôme :

Proposition 2.2 *Dans un marché financier $(S_t, B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ où S_t suit un modèle CRR, le prix d'une option européenne $(T, \varphi(S_T))$ est donnée par*

$$e^{-rT}\mathbb{E}(\varphi(S_T)) = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} p^j(1 - p)^{n-j}\varphi(S_0u^jd^{n-j}) \tag{2.18}$$

c'est-à-dire que ce prix est la valeur actualisée de l'espérance, sous la probabilité de calcul, de sa fonction de paiement ; ainsi, pour une option call, c'est-à-dire si $\varphi(S) = (S - K)^+$, on a

$$C_0 = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} p^j(1 - p)^{n-j}(S_0u^jd^{n-j} - K)^+$$

et pour le cas d'un put, c'est-à-dire si $\varphi(S) = (K - S)^+$, on a

$$P_0 = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} p^j(1 - p)^{n-j}(K - S_0u^jd^{n-j})^+.$$

La formule (3.3) s'appelle la *formule fondamentale* pour l'évaluation du prix d'une option européenne dans un modèle de Cox, Ross, et Rubinstein.