Chapitre 5

Crédit et microcrédit

Cette leçon est une modeste excursion dans un vaste et important chapitre de la finance mathématique qui concerne le crédit et les taux d'intérêts.

L'intérêt est avant tout la rémunération, sous la forme de versements périodiques, d'un prêt consenti par un préteur à un emprunteur. C'est probablement l'une des activités financières les plus anciennes, déja pratiquée dans la plus haute antiquité. Pour le préteur, l'intérêt est le prix reçu pour la renonciation temporaire à une consommation et pour l'emprunteur c'est le prix payé pour une jouissance immédiate.

Au fil du temps les intérêts, accusés d'appauvrir les uns au profit d'autres ont fait souvent l'objet d'interdiction ou de limitations. Ils sont perçus de façon bien différente selon les cultures et selon les religions. Ainsi la Bible (dans l'ancien testament) et le Coran contiennent des passages qui furent interprétés par les exégètes comme condamnant la pratique du prêt à intérêts. Les choses ont été codifiées dans la religion juive par l'interdiction de demander des intérêts à d'autres juifs. Cette même règle a été aussi longtemps en vigueur dans la religion catholique. Les protestants ont contribués à la levée progressive de son interdiction dans les pays européens, restée pourtant en vigueur jusqu'en 1830. Pour l'islam, l'interdit subsiste et le développement depuis peu de banques islamiques fonctionnant sur des principes différents en est une conséquence. Quoiqu'il en soit la question de l'intérêt reste un sujet sensible qui est encore souvent perçu différemment selon les origines culturelles des personnes.

5.1 Capitalisation et actualisation

Le principe de base de la capitalisation est qu'un Euro aujourd'hui n'est pas égal à un Euro demain mais qu'il vaudra alors (un peu) plus : c'est ce que l'on appelle la *valeur temps de l'argent.* Ainsi un montant B_0 placé durant une période δt accumule un intérêt $B_0\rho > 0$ et vaudra donc $B_0(1+\rho)$ à l'issue de cette période. On parle d'*intérêts simples* lorsque l'intérêt accumulé est le même à chaque période et donc, à l'issue de n périodes, $T = n\delta t$, il vaudrait $B_0(1+n\rho)$. Mais, en général, on considère plutôt que les intérêts accumulés pendant une période rapportent à leur tour des intérêts durant la période suivante et ainsi de suite : c'est la formule des *intérêts composés.* Ainsi le montant B_0 vaudra encore $B_0(1+\rho)$ à l'issue de la première période mais il vaudra $[B_0(1+\rho)](1+\rho) = B_0(1+\rho)^2$ à l'issue de la deuxième et $B_T = B_0(1+\rho)^n$ après n periodes.

La suite de quantités $B_0, B_{\delta t}, \ldots, B_T$ forment donc une progression géométrique de raison $(1+\rho)$ (alors que dans le cas d'intérêts simple c'est une progression arithmétique). Si l'on désigne, comme précédemment, par t les instants successifs multiples de δt, $t \in \{0, \delta t, 2\delta t, \ldots, n\delta t = T\}$, et si l'on définit r comme étant le nombre réel tel que

$$e^{r\delta t} = 1+\rho$$

nombre que l'on appelle le *taux d'intérêt continu*, on peut réécrire la suite des $B_{i\delta t} = B_t$ comme une fonction exponentielle du temps

$$B_t = B_0 e^{rt} \text{ , avec } B_0 \text{ souvent choisi égale à 1, sans perte importante de généralité.}$$

C'est cette écriture que nous utilisons dans ce cours. A noter que pour r assez petit, comme $e^{r\delta t} = 1 + r\delta t + \frac{1}{2\,!}(r\delta t)^2 + \ldots$, l'intérêt ρ est peu différent de $r\delta t$, les termes suivants du développement limité pouvant être négligés.

Tout comme un Euro aujourd'hui vaudra $e^{r\delta t}$ à l'issue d'une période δt, la valeur actuelle d'un Euro délivré à la date δt vaut aujourd'hui $e^{-r\delta t}$ puisque cette quantité, qui est (un peu) plus petite que 1, vaudra $(e^{-r\delta t})e^{r\delta t} = 1$ après une période.

Lorsqu'un actif prend de la valeur au cours du temps en accumulant des intérêts, on parle de *capitalisation.* A l'inverse la prise en compte dans l'évaluation d'un actif de sa valeur actuelle au lieu de sa valeur future s'appelle l'*actualisation.* On note $\tilde{C}_t$ la *valeur actualisée à* l'instant $t = 0$ de la quantité C_t, c'est-à-dire $\tilde{C}_t := e^{-rt}C_t$. A noter que la valeur actualisée de la suite des $B_t = e^{rt}, t \in \{0, \delta t, \ldots, n\delta t\}$ est la suite constante égale à 1.

5.2 Microcrédit

Le microcrédit est un ensemble de contrats permettant d'offrir de très petits crédits à des individus très pauvres pour les aider à développer de petites entreprises ou des activités génératrices de revenus. L'idée de base est partie de la constatation qu'une grande part de l'humanité n'a pas accès au crédit traditionnel car les banques exigent de leurs emprunteurs qu'ils satisfassent toute une série de critères, comme le fait de savoir lire et écrire, de possèder des documents d'identification, d'avoir des garanties ou dejà un dépot minimum.

Les premières expérimentations remontent aux années 70 au Bangladesh à l'initiative de Muhammad Yunus, alors professeur d'économie à l'université de Chittagong. En 1974, il assista, impuissant, à une terrible famine dans le petit village de Joha proche de son université. Il interroge alors avec ses étudiants les artisans et paysans du village pour tenter de comprendre leurs besoins et recence une demande de petits prêts chez 42 femmes à qui il décide finalement de prèter lui-même une somme totale d'environ 27 Euros. Il met ensuite près de 10 années à tenter de convaincre les banques d'assumer ces prêts avant de décider finalement, devant leur refus, de fonder sa propre banque, la Grameen Banque, en 1983. Cette banque et lui-même reçurent le prix Nobel de la Paix en 2006. Actuellement l'activité de micro crédit s'est répandue dans la plupart des pays du monde, elle est assurée par près de 10 000 *Instituts de Micro Finance* (IMF) qui prètent 50 Milliards d'Euros à près de 500 Millions de bénéficiaires.

Les principales caratéristiques du microcrédit sont

— Très petits prêts consentis sur des périodes courtes (10 Euros sur une année) avec des remboursements fréquents (chaque semaine).
— Souscrits même en l'abscence complète de garantie individuelle
— Prets destinés à permettre une activité rémunératrice (micro entreprise)
— Souvent accordés *prêts groupés* c'est-à-dire consentis à un groupe d'emprunteurs (entre 5 et 30) qui reçoivent chacun un prêts mais sont solidaires en ce sens qu'ils doivent assumer tout ou partie de la défaillance (on dit le “défaut”) d'un membre du groupe.
— Bénéficiant le plus souvent aux femmes.
— Taux d'intérêt pratiqués souvent élévés, de l'ordre de 20%, pouvant parfois aller jusqu'à 30%.
— Possibilité d'un nouveau prêt automatiquement accordé en cas de remboursements effectifs sans retards (méchanisme d'*incitation dynamique*).
— Taux de remboursement proches de 100%.

Exemple : L'exemple suivant est donné par Muhammad Yunus [1] :

Considérons un prêt de 1000 BDT [2], d'une durée d'un an et supposons que les remboursements demandés s'élèvent à 22 BDT par semaine. Si l'on note r le taux continu annuel pratiqué, les 22 BDT remboursés après une semaine ont pour valeur présente $22e^{\frac{-r}{52}}$ et ceux que l'on rembourse la semaine suivante $22e^{\frac{-2r}{52}}$....et ainsi de suite. On aura donc, en posant $q = e^{-\frac{r}{52}}$, l'équation suivante pour q :

$$1000 = 22\sum_{k=1}^{50} q^k = 22\frac{q - q^{51}}{1 - q}. \tag{5.1}$$

La résolution de cette équation conduit à la solution $q \simeq 0.996$ et donc à un taux d'intérêt $r \simeq 19,74$ presque égal à 20%.

1. Le livre de Muhammad Yunus *Vers un monde sans pauvreté*, Editions JC Lattès (1997), està présent disponible en Livre de Poche.
2. 100 Bangladesh Taka (BDT) vaut environs 1 Euros.

5.3 Obligations et zéros-coupons

A coté des actions et de leurs produits dérivés, il existe sur les marchés à la disposition des investisseurs une autre grande famille d'actifs financiers liés aux taux d'interêt dont les plus simples sont les *obligations*.

Les obligations sont des contrats qui assurent à leur détenteur à la signature du contrat un flux connu de revenus, composé du *principal* versé à terme et d'une succession de *coupons* versés à des dates intermédiaires. On évalue facilement leur prix à l'instant initial $t = 0$ si l'on connait le taux d'intérêt (supposé constant pour simplifier). Par exemple une obligation d'état qui rapporte 1000 Euros dans 5 ans et 3% (soit 30 Euros) tous les 6 mois pourrait s'évaluer, si le taux d'intérêt annuel r est constant sur la période, comme

$$30e^{-\frac{1}{2}r} + 30e^{-r} + 30e^{-\frac{3}{2}r} + \ldots + 30e^{-\frac{9}{2}r} + 1000e^{-\frac{5}{2}r}.$$

De façon plus générale, une obligation de principal P, d'échéance T et versant les coupons c_i aux dates t_i, pour $0 < t_1 < ... < t_i < ... < t_k = T$, a, pour un taux d'intérêt r, la valeur suivante à l'instant $t = 0$:

$$P_0 = \sum_{i=1}^{k-1} c_i e^{-rt_i} + Pe^{-rT}. \tag{5.2}$$

En pratique, l'évaluation des obligations va se faire, à partir des prix observés, à travers la notion de zéro-coupons, que nous définissons à présent.

Définition : Un *zéro-coupon* de maturité T est un titre qui rapporte 1 Euros à une date future T fixée. Sa valeur à tout instant $t \in [0, T]$ se note $Z(t, T)$, ou encore Z_t^T et on a donc toujours $Z(T, T) = 1$.

Le zéro-coupon est un actif *théorique* que l'on introduit notamment comme référence pour calculer le prix des obligations. En effet, toute obligation de principal P, d'échéance T et versant aux dates t_i les coupons c_i peut s'écrire, pour tout $t \leq T$, comme une simple combinaison linéaire de zéro-coupons

$$\sum_{i=1}^{k-1} c_i Z(t, t_i) + PZ(t, T).$$

Comme les zéro-coupons ne sont pas des actifs effectivement disponibles sur le marché, les praticiens sont conduits à reconstituer, à chaque date t, les valeurs $Z(t, T)$ pour toutes les valeurs $t < T < T_{\max}$ à partir des prix observées à cette date t des obligations disponibles sur le marché. Dans un marché liquide où l'on dispose des prix d'un nombre suffisant d'obligations dont les dates de versements sont identiques (ou compatibles), c'est simplement un problème de résolution d'un système linéaire. S'il y a trop peu de prix observés, on utilise ceux dont on dispose et on complète la fonction $T \to Z(t, T)$ par diverses méthodes d'interpolation. Notons cependant que si, à toute date t, les valeurs des zéro-coupons $Z(t, T)$ peuvent en principe être calculées à partir des prix observés à cette date, et donc sont considérées comme connues à cette date, les valeurs $Z(t + \delta t, T)$ des zéro-coupons à la date suivante $t + \delta t$ et de façon générale les valeurs des zéro-coupons à une date future quelconque, sont inconnues et peuvent varier considérablement. D'où l'utilité d'une modélisation stochastique que nous verrons dans un chapitre ultérieur.

5.4 Taux actuariel et retards

Définition : Le *taux actuariel* est le taux (supposé constant) qu'il faudrait utiliser dans la formule (5.2) pour obtenir le prix observé sur les marchés, noté P_0, ou, pour un crédit son prix initial. En d'autres termes, le taux actuariel r est définit implicitement par la relation

$$P_0 = \sum_{i=1}^{k-1} c_i e^{-rt_i} + Pe^{-rT}.$$

A noter que le taux actuariel d'une obligation ou d'un prêt augmente lorsque son prix diminue et qu'il diminue lorsque son prix augmente. A noter aussi que le taux actuariel est le seul moyen de comparer les prix de deux prêts qui n'ont pas la même structure (pas les mêmes montants et/ou pas les mêmes dates de remboursements).

L'examen de cette formule permet aussi de voir que lorsqu'un remboursement intervient en retard (c'est-à-dire lorsqu'un des t_i augmente), le taux actuariel correspondant va automatiquement diminuer.

On comprend donc pourquoi les retards représentent un risque pour le préteur. Nous allons voir qu'on peut modéliser ce risque au moyen d'un modèle de taux actuariel stochastique.

Pour expliquer ce modèle dans le cas le plus simple possible, on revient à l'équation de Yunus (5.1) que nous ré écrivons à présent :

$$1000 = \sum_{k=1}^{50} 22e^{-rs_k} = 22\sum_{k=1}^{50} q^{t_k} \tag{5.3}$$

où $s_k =$ est la date du k-ième remboursement (en années), $q := e^{-\frac{r}{52}}$ et $t_k = 52s_k$ la date en semaines. En effet, il est prévu des remboursements hebdomadaires et donc en principe $t_k = k$, mais en réalité la durée $x_k := t_k - t_{k-1}$ qui sépare le k-ième versement du précédent peut parfois être supérieure à 1 semaine, si la semaine n'a pas été bonne .... Pour prendre en compte ces retards éventuels, on introduit un modèle aléatoire, avec un processus de Bernoulli $(B_i)_{i=1,2,\ldots}$ où les v.a. B_i sont des v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(1,p)$, où $B_i = 1$ lorsque la i-ième semaine a été bonne et a donné lieu à un remboursement (avec un probabilité p) et $B_i = 0$ sinon. On définit alors la date aléatoire (en semaines) du k-ième remboursement par :

$$T_k = \mathrm{Min}\,\{n \geq 1 | B_1 + \ldots + B_n = k\} = X_1 + \ldots + X_k.$$

Comme $\{X_k = x\} = \{B_{T_{k-1}+1} = 0, \ldots, B_{T_{k-1}+k-1} = 0, B_{T_{k-1}+x} = 1\}$, on voit que $\mathbf{P}(X_k = x) = (1-p)^{x-1}p$, et donc $X_k \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$, c'est-à-dire suit une **loi géométrique** de paramètre p. Le taux d'intérêt r devient également aléatoire, on le note R, et il vérifie l'équation

$$22\sum_{k=1}^{50} Q^{T_k} = 1000$$

avec $Q := e^{-\frac{R}{52}}$.

On ne sait pas précisément quelle est la loi de la v.a. R mais on peut simuler avec Scilab un échantillon d'un grand nombre d'emprunteurs qui, pour les uns vont rembourser sans aucun retards et pour les autres vont avoir des retards lors de certains de leurs remboursements selon le modèle introduit.

L'histogramme des taux actuariels d'un tel échantillon (voir figure 5.1) montre que les taux actuariels des emprunteurs ayant présenté un ou plusieurs retards sont inférieurs (et selon les retards, parfois nettement inférieurs) à ceux des emprunteurs ayant effectué l'ensemble de leurs remboursements sans retard, qui, lui, est d'environs 20%, comme nous l'avions calculé précédemment.

FIGURE 5.1 – Distribution du taux actuariel R pour une probabilité de remboursement sans retard de $p = 0.95$ et un échantillon de 1000 emprunteurs.