Chapitre 7

Martingales, arbitrage et complétude

La notion de martingale joue aujourd'hui un rôle central en finance mathématique[1] ; elle était déja présente dans la thèse de Louis Bachelier en 1900 mais elle n'a commencé à être étudiée systématiquement par les mathématiciens que vers 1940, notamment par P. Levy et J.L. Doob, et plus tard par l'école de probabilités de Strasbourg, notamment P.A. Meyer. Ce n'est qu'à la fin des années 70 et au début des années 80 (dans un séries d'articles de M. J. Harrison, D. M. Kreps et S. R. Pliska) que l'on a commencé à comprendre les liens entre les notions économiques ou financières d'absence d'opportunitéé d'arbitrage et de complétude du marché et la notion mathématique de martingale. Ce sont ces liens que nous étudions ici à travers notamment deux résultats importants parfois appelés les deux théorèmes fondamentaux de la finance mathématique.

7.1 Martingales

Intuitivement, une martingale est une marche aléatoire n'ayant ni tendance haussière ni tendance baissière, sa valeur à chaque instant étant égale à l'espérance de ses valeurs futures. On utilise des marches aléatoires ayant cette propriété pour modéliser le prix des actifs financiers car un prix de marché est un nombre sur lequel deux parties, celle qui achète et celle qui vend, tombent d'accord ; si le prix avait une tendance à la hausse, le vendeur n'aurait pas accepté la transaction et inversement s'il avait une tendance à la baisse c'est l'acheteur qui l'aurait refusé. Donc il est naturel de supposer qu'un *fair-price* a la propriété de martingale. Cela n'entraine nullement que le prix ne varie pas car, selon l'état du monde qui se réalise, il augmente effectivement ou bien diminue. Mais lorsque l'on prend en compte l'ensemble des états du monde possibles, il est raisonnable de supposer que sa variation espérée est nulle. Bien sûr, les véritables variations du prix qui interviendront dans la réalité, et qui dépendent de l'état du monde, seront certainement non nulles. D'ailleurs, c'est parce que les deux parties n'ont pas les mêmes anticipations sur l'état du monde qui va se réaliser que la transaction a lieu.

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé fini et soit $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une filtration de Ω. On dit qu'une marche aléatoire $M := (M_t)_{t\in[0..T]_{\delta t}}$ est une $\mathcal{F}$-*martingale* (mtg) si et seulement si

$$\text{pour tous } s \leq t,\ M_s = \mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s). \tag{7.1}$$

Observons qu'il résulte de la définition de l'espérance conditionnelle qu'une $\mathcal{F}$-martingale est toujours une marche aléatoire $\mathcal{F}$-adaptée, c'est-à-dire que, pour tout t, la v.a. M_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

La proposition suivante donne trois autres caractérisations de la propriété de martingale, souvent utiles, qui découlent également des propriétés de l'espérance conditionnelle. On utilise la notation $\mathbb{E}_s X := \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_s)$.

Proposition 7.1 *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *M est une martingale.*
2. *Pour tout $s \in \mathbb{T}$, $M_s = \mathbb{E}_s(M_{s+\delta t})$.*
3. *Pour tout $s \in \mathbb{T}$, M_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable et $\mathbb{E}_s(\delta M_{s+\delta t}) = 0$, où $\delta M_{s+\delta t} := M_{s+\delta t} - M_s$.*
4. *Pour tout $s \leq t$ dans $\mathbb{T}$, M_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable et $\mathbb{E}_s(M_t - M_s) = 0$.*

1. Voir le livre de Nicolas Bouleau, *Martingales et marchés financiers*, Editions Odile Jacob, 1998

Preuve : On fait une démonstration "circulaire" : la propriété 1 entraine évidemment 2 et si la propriété 2 est vraie, on a :

$$\mathbb{E}_s(M_{s+\delta t} - M_s) = \mathbb{E}_s(M_{s+\delta t}) - M_s = M_s - M_s = 0.$$

D'où la propriété 3. Si celle-ci est vraie, alors

$$\mathbb{E}_s(M_t - M_s) = \mathbb{E}_s\left(\sum_{\tau=s}^{t-\delta t}(M_{\tau+\delta t} - M_\tau)\right) = \sum_{\tau=s}^{t-\delta t}\mathbb{E}(\delta M_{\tau+\delta t}) = \sum_{\tau=s}^{t-\delta t}\mathbb{E}_s(\mathbb{E}_\tau(\delta M_{\tau+\delta t})) = 0.$$

D'où la propriété 4. On vérifie enfin que la propriété 4 implique à son tour la propriété 1 car, comme M_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable $M_s = \mathbb{E}_s(M_s)$, et donc $M_s - \mathbb{E}_s(M_t) = \mathbb{E}_s(M_s - M_t) = 0$. □

Exemples :

1. Le premier exemple est celui de la p-marche de Wiener $(W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ pour laquelle on a par définition :

$$\mathbb{E}(\delta W_t) = p\sqrt{\delta t} + (1-p)(-\sqrt{\delta t}) = (2p-1)\sqrt{\delta t}.$$

   Donc c'est une martingale (par rapport à la filtration qui lui est associée) si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.
2. Le second exemple est celui de la marche aléatoire de Cox, Ross et Rubinstein $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ qui modélise le prix d'un actif financier à l'instant t. Pour trouver une probabilité $p = P(S_{t+\delta t}/S_t = u)$ telle que sa valeur actualisée soit une martingale, on procède de la façon suivante : si r désigne le taux d'escompte monétaire, supposé constant, et $\tilde{S}_t$ le prix actualisé, $\tilde{S}_t := e^{-rt}S_t$, on a les relations suivantes que doit satisfaire p :

$$\mathbb{E}_t(\tilde{S}_{t+\delta t}) = e^{-r(t+\delta t)}\mathbb{E}(S_{t+\delta t}) = e^{-r(t+\delta t)}(pS_tu + (1-p)S_td) = e^{-r\delta t}(pu + (1-p)d)\tilde{S}_t.$$

   Donc $\tilde{S}_t$ est une $\mathcal{F}$-martingale pourvu que $pu + (1-p)d = e^{r\delta t}$. On retrouve la probabilité risque neutre introduite pour évaluer le prix d'options :

$$p = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}.$$

   Dans le modèle CRR, la probabilité risque neutre est donc l'unique probabilité pour laquelle $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$, la valeur actualisée de l'actif sous-jacent S_t, est une martingale. Désignons par $\mathbb{E}_t^*(X)$ et $\mathbb{E}_t^*(X) = \mathbb{E}(X/\mathcal{F}_t)$ l'espérance et l'espérance conditionnelle de X pour cette probabilité. On a donc $S_t = e^{-r\delta t}\mathbb{E}_t^*(S_{t+\delta t})$ et $\tilde{S}_t = \mathbb{E}_t^*(\tilde{S_{t+\delta t}})$
3. Le troisième exemple est celui d'une martingale fermée par une v.a. : si Φ est une v.a. sur un espace probabilisé muni d'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, la marche aléatoire $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ définie par $X_t := \mathbb{E}(\Phi/\mathcal{F}_t)$ est, par construction, une martingale. De façon générale, on dit qu'une $\mathcal{F}$-martingale M_t est une martingale *fermée par la v.a.* Φ si elle s'écrit $M_t := \mathbb{E}(\Phi/\mathcal{F}_t)$ pour une certaine v.a. Φ. C'est une façon naturelle de construire une martingale et c'est ce que nous avons fait à travers la fomule fondamentale pour la marche $\tilde{C}_t$. Nous avons vu en effet que

$$C_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_t)$$

   ce qui s'écrit encore $e^{rt}C_t = \mathbb{E}(e^{rT}\varphi(S_T)/\mathcal{F}_t)$. Ainsi la formule fondamentale indique qu'à tout instant t, le prix actualisé $\tilde{C}_t = e^{-rt}C_t$ d'une option européenne $(T, \varphi(S_T))$ est la martingale fermée par la v.a. $e^{-rT}\tilde{\varphi}(S_T)$.

Proposition 7.2 *Si $(M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une martingale, alors $t \mapsto \mathbb{E}(M_t)$ est constant et pour tout $t \in \mathbb{T}$ on a $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0)$. En particulier si M_0 est une v.a. constante, égale au nombre M_0, on a pour tout t, $\mathbb{E}(M_t) = M_0$.*

De cette proposition appliquée à la martingale $(\tilde{C}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, on déduit immédiatement que la valeur de la prime C_0 est l'espérance du payoff $\tilde{C}_T = \varphi(\tilde{S}_T)$.

Pour finir ce paragraphe, indiquons la definition de sur- et sous-martingale, utile notamment pour l'étude des options américaines.

Définition : On dit qu'une m.a. $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une $\mathcal{F}$-*sous*[2]*-martingale* si et seulement si X est $\mathcal{F}$-adaptée et

$$\text{pour tous } s \le t,\ X_s \le \mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s). \tag{7.2}$$

On définit de façon analogue les $\mathcal{F}$-*surmartingales*. Evidemment une m.a. qui est à la fois une sur- et une sous-martingale est une martingale.

2. retenir que toute valeur X_s de la marche est "sous" ($\le$) l'espérance (conditionnelle) de toute valeur future ($\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$).

7.2 Marché et “pertes et profits” d’un portefeuille

Le fait que les valeurs actualisées des deux actifs (risqué et non risqué) qui composent le portefeuille de couverture d’une option soient des martingales entraine automatiquement, comme nous allons le voir maintenant, qu’il en est de même de la valeur de ce portefeuille autofinancé. Ceci fournit d’ailleurs une nouvelle façon de se convaincre que la valeur actualisée de l’option (qui par définition est le prix d’un portefeuille de couverture) est elle-même une martingale.

Ce résultat important est en fait valable non seulement lorqu’on ne dispose que de deux actifs, l’un risqué et l’autre non risqué, mais plus généralement lorsque l’on dispose de $d+1$ actifs, d’où la généralisation proposée maintenant.

Définition : Un *marché financier* est la donnée de $(d+1)$ marches aléatoires $(S_t^1, \dots, S_t^d \,; B_t)$ définies sur le même espace probablisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ muni d’une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, telles que :

— $(B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est déterministe (par exemple $B_t = e^{rt}$) : elle modélise un actif non risqué.

— $(S_t^1)_{t\in\mathbb{T}}$, …, $(S_t^d)_{t\in\mathbb{T}}$ sont $\mathcal{F}$-adaptées : elles modélisent d actifs risqués.

Pour définir la notion de portefeuille dans un tel marché financier, il est utile d’introduire la notion de marche aléatoire prévisible.

Définition : Une marche aléatoire $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est dite *prévisible par rapport à une filtration* $\mathcal{F}$ si, pour tout $t \in \mathbb{T}$, X_t est $\mathcal{F}_{t-\delta t}$-mesurable.

Rappelons qu’une v.a. est $\mathcal{F}_{t-\delta t}$-mesurable lorsqu’elle *est connue* dès qu’on connait l’information dont on dispose à l’instant $t-\delta t$, information représentée par la tribu $\mathcal{F}_{t-\delta t}$. L’exemple typique de m.a. prévisible que nous considérerons est la m.a. α_t qui représente la composition en actif sous-jacent d’un portefeuille de couverture d’une option. En effet on supposera cette composition choisie à l’instant $t-\delta t$ au vu du prix atteint par l’actif sous-jacent à cet instant et maintenue inchangée jusqu’à l’instant t, date à laquelle le détenteur du portefeuille réajuste sa position au vu de la nouvelle valeur atteinte par l’actif sous-jacent à cette date.

Définition : On appelle *portefeuille* $\Pi = (\Pi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ (ou *stratégie de portefeuille*) une famille de $d+1$ m.a. prévisibles $\Pi_t = (\alpha_t^1, \dots, \alpha_t^d \,; \beta_t) = (\alpha_t \,; \beta_t)$ et *valeur* du portefeuille (ou de la stratégie) Π la quantité

$$V_t^\pi = \alpha_t^1 S_t^1 + \dots + \alpha_t^d S_t^d + \beta_t B_t = \alpha_t \cdot S_t + \beta_t B_t$$

Il est utile d’introduire, à coté des prix des actifs ou des portefeuilles leurs *prix actualisés*, de façon à pouvoir comparer leurs valeurs à des instants t différents. On désigne par $\tilde{S}_t := \frac{S_t}{B_t}$ et $\tilde{V}_t^\pi := \frac{V_t^\pi}{B_t}$ ces valeurs actualisées. On a alors

$$\tilde{V}_t^\pi = \alpha_t \cdot \tilde{S}_t + \beta_t.$$

Remplacer dans les calculs les prix des actifs S_t^i par leurs valeurs actualisées $\tilde{S}_t^i$ correspond à ce que l’on appelle parfois “travailler en Euros constants” c’est-à-dire choisir comme numéraire le prix de l’actif non risqué B_t et donc exprimer les autres prix en fonction de celui-ci. On supposera aussi désormais que $B_0 = 1$.

Une propriété importante des portefeuilles que nous considérons, que possèdent notamment les portefeuilles destinés à couvrir une option, est d’être autofinancés, c’est-à-dire que, lors de la recomposition à chaque instant $t \in \mathbb{T}$, les modifications se font sans apport ni retrait de fonds. Cette propriété s’exprime par l’identité suivante :

Définition : Un portefeuille $\Pi_t = (\alpha_t \,; \beta_t)$ est dit *autofinancé ssi* pour tout $t = 0, \dots, T-\delta t$, on a :

$$\alpha_{t+\delta t} \cdot S_t + \beta_{t+\delta t} B_t = \alpha_t \cdot S_t + \beta_t B_t. \tag{7.3}$$

Une autre façon d’évaluer la valeur d’un portefeuille autofiancé est d’étudier ses “pertes et profits”, c’est-à-dire la somme accumulée des gains et pertes réalisés, en raison des variations de la valeur des actifs qui le composent.

Définition : On appelle *pertes et profits*, noté $P\&P_t$, d’un portefeuille $\Pi_t = (\alpha_t \,; \beta_t)$ la quantité

$$P\&P_t(\alpha) := \sum_{s=\delta t}^{t} \alpha_s(\delta \tilde{S}_s) \text{ où } \delta\tilde{S}_s = \tilde{S}_s - \tilde{S}_{s-\delta t}.$$

Proposition 7.3 *Pour un portefeuille autofinancé, on a la propriété suivante :*

$$\tilde{V}_t^\pi = V_0^\pi + P\&P_t.$$

Preuve : Par (7.3) pour $t = s - \delta t$, on a $V_{s-\delta t}^\pi = \alpha_s \cdot S_{s-\delta t} + \beta_s B_{s-\delta t}$, et donc

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t^\pi &= \sum_{s=\delta t}^{t} \delta \tilde{V}_s^\pi + \tilde{V}_0^\pi = \frac{V_0^\pi}{B_0} + \sum_{s=\delta t}^{t} \left(\frac{V_s^\pi}{B_s} - \frac{V_{s-\delta t}^\pi}{B_{s-\delta t}} \right) \\ &= V_0^\pi + \sum_{s=\delta t}^{t} \frac{1}{B_s}(\alpha_s \cdot S_s + \beta_s B_s) - \frac{1}{B_{s-\delta t}}(\alpha_s \cdot S_{s-\delta t} + \beta_s B_{s-\delta t}) \\ &= V_0^\pi + \sum_{s=\delta t}^{t} (\alpha_s \cdot \tilde{S}_s + \beta_s) - (\alpha_s \cdot \tilde{S}_{s-\delta t} + \beta_s) = V_0^\pi + \sum_{s=\delta t}^{t} \alpha_s \cdot \delta \tilde{S}_s = V_0^\pi + P\&P_t. \end{aligned}$$

□

Si l'on suppose que $\tilde{S}_t$ est une martingale, la somme $\sum_{s=\delta t}^{t} \alpha_s(\delta \tilde{S}_s)$ s'appelle la *transformée de la martingale* $\tilde{S}_t$ par la marche aléatoire prévisible α_t. Cette somme est une version discrète de l'*intégrale stochastique* de la marche α_t contre les variations de la martingale $\tilde{S}_t$. Cette somme est elle-même une martingale comme nous allons le voir maintenant.

7.3 Marchés sans arbitrage

Pour simplifier, on suposera dans ce paragraphe et le suivant que le taux d'intéret r est nul. Ce n'est guère réaliste mais une fois les résultats exposés ici bien compris dans ce cas particulier, il est facile de les généraliser au cas général où r n'est pas nul.

Dans la suite, on notera pour simplifier α_t le vecteur de composantes du portefeuille $\Pi_t = (\alpha_t\ ; \beta_t)$. On parlera indifféremment de portefeuille ou de stratégie.

Définition : On dit qu'un portefeuille est un *portefeuille d'arbitrage* (ou une *opportunité d'arbitrage* ou simplement un *arbitrage*) si $P\&L_T^S(\alpha) \geq 0$, et s'il existe un état du monde au moins $\omega_0 \in \Omega$ tel que $P\&L_T^S(\alpha)(\omega_0) > 0$.

En d'autres termes, un arbitrage est un portefeuille tel que même lorsque sa valeur initiale est nulle, sa valeur en T est toujours positive ou nulle et même strictement positive dans au moins un état du monde. C'est donc une stratégie (qu'on appelle aussi parfois *free lunch*) qui est gagnante dans certains cas et ceci sans prendre aucun risque puisqu'elle n'est jamais perdante.

Dans la modélisation des marchés financiers, on admettra généralement qu'une telle stratégie n'existe pas. C'est l'hypothèse dite d'*absence d'opportunité d'arbitrage.* On explique souvent cette hypothèse en disant que si d'aventure une opportunité d'arbitrage apparaisait quelque part le marché se chargerait de la faire disparaître presqu'aussitôt. Il n'est donc pas deraisonnable de supposer qu'à *l'équilibre* il n'en existe pas.

Le théorème suivant est souvent appelé le *premier théorème fondamentale.* Il donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un marché soit sans arbitrage. Le fait que cette condition soit suffisante est assez facile à prouver. La preuve de la réciproque (la condition est nécéssaire) est plus élaborée et cette réciproque n'est d'ailleurs plus vraie telle quel lorsqu'on quitte le monde des modèles discrets (Ω fini) pour celui des modèles continus (il en existe toutefois une généralisation dans le cas continu aussi).

Théorème 7.4 *Un marché financier* $(S_t^1, \ldots, S_t^d\ ; B_t)$ *est sans arbitrage si et seulement s'il existe une probabilité* $\mathbb{P}^*$*, avec* $\mathbb{P}^*(\{\omega\}) > 0$ *pour tout* $\omega \in \Omega$*, telle que tous les actifs actualisés* $(\tilde{S}_t^1, \ldots, \tilde{S}_t^d\ ; \tilde{B}_t)$ *soient des martingales sous cette probabilité. Cette probabilité* P^* *s'appelle* probabilité de martingale *ou* probabilité risque neutre.

Avant de démontrer ce théorème, étudions un exemple que l'on peut trouver dans le livre de Pliska :

Exemple : C'est un exemple à une étape (c'est-à-dire un pas de temps unique $\delta t = T$) et pour lequel on n'a qu'un seul actif risqué S_t défini par $S_0 = 5$ et $S_{\delta t} \in \{3, 4, 6\}$. Comme habituellement on suppose $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et on désigne par $p = \mathbb{P}^*\{S_{\delta t} = 3\}$, $q = \mathbb{P}^*\{S_{\delta t} = 4\}$, and $1 - p - q = \mathbb{P}^*\{S_{\delta t} = 6\}$. Dans ce cas, il est facile de voir que pour que $S = (S_t)_{t \in \{0,T\}}$ soit une martingale il faut que (on rappelle que $r = 0$) :

$$5 = S_0 = \mathbb{E}^*(S_{\delta t} \mid \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}^*(S_{\delta t}) = p3 + q4 + (1 - p - q)6 = 6 - 3p - 2q,$$

ou, ce qui revient au même, que $q = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}p$ (et $1 - p - q = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p$). Finalement S est une martingale si $3p + 2q = 1$ et $\mathbb{P}^*\{S_{\delta t} = 3\} = p \in (0, \frac{1}{3})$. Les valeurs possibles pour les deux autres probabilités en découlent : $q = \mathbb{P}^*\{S_{\delta t} = 4\} \in (0, \frac{1}{2})$ et $1 - p - q = \mathbb{P}^*\{S_{\delta t} = 6\} \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$. Donc, le théorème 7.4affirme que ce modèle est sans arbitrage si et seulement si $p \in (0, \frac{1}{3}) =: (p^{*-}, p^{*+})$. En d'autres termes, il y a un ensemble des probabilités de martingale pour ce modèle qui forment un segment du type $(\frac{1+\lambda}{2}, \frac{1-3\lambda}{2}, \lambda), \lambda \in [0, \frac{1}{3}]$.

On retiendra qu'en dehors de ces probabilités de martingale (qui donneront chacune un prix d'option différent) aucune probabilité n'est acceptable car toute autre probabilité conduirait à un modèle présentant des opportunités d'arbitrage. Nous reviendons sur la question de la non unicité au prochain paragraphe.

Preuve : Première partie : Pour montrer que l'existence d'une probabilité de martingale entraine l'absence d'opportunité d'arbitrage (qui est la partie facile de la preuve), nous utiliserons le résultat suivant :

Proposition 7.5 *Si $\mathbb{P}^*$ est une probabilité de martingale et α une stratégie autofinancée alors le processus de pertes et profits associé à cette stratégie, $P\&P(\alpha)$, est aussi une $\mathbb{P}^*$-martingale.*

Preuve : On fait la preuve dans le cas d'un seul actif risqué (S_t) pour simplifier. Pour montrer que $P\&P(\alpha)$ est une martingale on utilise la troisième propriété de la proposition 7.1. On a :

$$\delta(P\&P(\alpha))_{t+\delta t} = \sum_{s\in(0..t+\delta t]_{\delta t}} \alpha_s \delta S_s - \sum_{s\in(0..t]_{\delta t}} \alpha_s \delta S_s = \alpha_{t+\delta t} S_{t+\delta t}.$$

Mais α est $\mathcal{F}_t$-previsible, donc $\alpha_{t+\delta t} \in \mathcal{F}_t$, donc

$$\mathbb{E}(\delta P\&P_{t+\delta t}(\alpha) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\alpha_{t+\delta t}\delta S_{t+\delta t}(\alpha) \mid \mathcal{F}_t) = \alpha_{t+\delta t}\mathbb{E}(\delta S_{t+\delta t}(\alpha) \mid \mathcal{F}_t) = 0,$$

cette dernière espérance étant nulle puisque S est martingale sous P^* par hypothèse. □

Pour prouver l'absence d'opportunité d'arbitrage, considérons un portefeuille α vérifiant $P\&P_0(\alpha) = 0$ et vérifions que $P\&P_T(\alpha)$ est nécessairement d'espérance nulle (et non strictement positive). Comme $\mathbb{P}^*$ est une probabilité de martingale, le processus $P\&P_t(\alpha)$ est une $\mathbb{P}^*$-martingale. Donc $P\&P_0(\alpha) = \mathbb{E}^*(P\&P_T(\alpha) \mid \mathcal{F}_0)$; mais comme $P\&P_0(\alpha) = 0$, on a

$$\mathbb{E}^*(P\&P_T(\alpha)) = \mathbb{E}^*(\mathbb{E}^*(P\&P_T(\alpha) \mid \mathcal{F}_0)) = \mathbb{E}^*(P\&P_0(\alpha)) = \mathbb{E}^*(0) = 0.$$

Donc cette stratégie ne peut être un arbitrage, ce qui prouve la première partie du théorème. □

Preuve : deuxième partie : Pour montrer l'existence d'une probabilité de martingale lorsque le marché est sans arbitrage, nous renvoyons le lecteur au livre de Lamberton et Lapeyre. □

7.4 Marchés complets et non complets

On a vu que lorsqu'on modélise les actifs financiers par des m.a. CRR avec la condition d'abscence d'opportunité d'arbitrage $d < R < u$, on peut construire, pour toute option européenne $(T, \varphi(S_T))$, un portefeuille autofinançant qui couvre l'option. On dit aussi de ce portefeuille qu'il *duplique* l'option puisque son prix est, à chaque instant, égal à celui de l'option, ou bien que celle-ci est *duplicable*.

Définition : Si Φ est une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable, on dit que Φ est *duplicable* s'il existe un portefeuille autofinançant tel que $V_T^\pi = \Phi$.

Si l'on choisit d'autres modèles que des modèles CRR pour décrire les actifs présents sur le marché, rien n'indique, à priori, que n'importe quelle option souscrite sur un de ces actifs, sera duplicable.

Définition : Un marché où toute option est duplicable s'appelle un *marché complet*. Sinon, on parle de marché *incomplet*.

Une question naturelle se pose : comment calculer le prix d'une option (non nécessairement duplicable) dans un marché incomplet ? La première règle est de se placer dans un marché sans arbitrage (on parle de marché *viable*) et dans ce cas, le théorème précédent affirme l'existence d'au moins une probabilité pour laquelle tous les actifs sont des martingales. On peut alors définir dans ce cas des prix de sur et sous couverture (non uniques) et on pourra vérifier (deuxième théorème fondamental) que seuls les marchés complets auront la propriété d'unicité du prix de couverture que nous avons rencontré dans le cas du modèle CRR.

Définition : Soit $(\mathcal{F}_t)$ la filtration représentant l'information disponible du marché que l'on suppose sans arbitrage. Un nombre $x \in \mathbb{R}$ est appelé un *prix de surcouverture* pour une v.a. Φ $\mathcal{F}_T$-mesurable (telle que le pay off d'une option) s'il existe une stratégie α telle que

$$x + P\&P_T(\alpha) \geq \Phi \ ; \tag{7.4}$$

De même x est un *prix de s*ous*couverture* pour Φ s'il existe une stratégie α telle que

$$x + P\&P_T(\alpha) \leq \Phi. \tag{7.5}$$

Proposition 7.6 *Soit un modèle sans arbitrage, soit $\mathbb{P}^*$ une probabilité pour laquelle tous les actifs sont des martingales et soit Φ un pay off $\mathcal{F}_T$-mesurable. Alors pour tout prix de surcouverture x^+ et tout prix de souscouverture x^- on a :*

$$x^- \leq \mathbb{E}^*(\Phi) \leq x^+.$$

Preuve : Soit une stratégie de surcouverture α telle que $x^+ + P\&P^S_T(\alpha) \geq \Phi$. Comme $\mathbb{P}^*$ est une probabilité de martingale, $\mathbb{E}^*(P\&P_T(\alpha)) = 0$. Donc

$$\mathbb{E}^*(\Phi) \leq \mathbb{E}^*(x^+ + P\&P_T(\alpha)) \leq x^+ + \mathbb{E}^*(P\&P_T(\alpha)) = x^+.$$

On montrerait que $x^- \leq \mathbb{E}^*(\Phi)$ de la même façon en utilisant cette fois une stratégie de sousconverture. □

Ce résultat montre que tout *prix de non arbitrage* $x^* := \mathbb{E}^*(\Phi)$ obtenu comme espérance du pay off pour une probabilité de martingale est borné supérieurement par n'importe quel prix de surcouverture et aussi borné inférieurement par n'importe quel prix de souscouverture. Posons :

$$\begin{aligned} x^+_X &:= \ \mathrm{Min}\,\{x \in \mathbb{R}, \text{ tel que } x \text{ est un prix de surcouverture pour } \Phi\} \\ x^-_X &:= \ \mathrm{Max}\,\{x \in \mathbb{R}, \text{ tel que } x \text{ est un prix de souscouverture pour } \Phi\}. \end{aligned}$$

Nous venons de voir que $x^* \in [x^-_X, x^+_X] \neq \emptyset$; cet intervalle est appelé l'intervalle des prix de non arbitrage. Notons que, comme Ω et $[0..T]_{\delta t}$ sont finis, le Max et le Min sont atteint, donc il existe des stratégies α^+ et α^- telles que $x^-_X + P\&P_T(\alpha^-) \leq \Phi \leq x^+_X + P\&P_T(\alpha^+)$, et il existe ω^- et ω^+ (possiblement égaux) tels que $x^\pm_X + P\&L^S_T(\alpha^\pm)(\omega^\pm) = \Phi(\omega^\pm)$.

Remarque : Dans l'exemple de Pliska, on avait $(p^{*-}, p^{*+}) \ := (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$. On peut ainsi vérifier que pour un Call à la monnaie $\varphi(S_T) := (S_T - S_0)^+$, on a $x^+ = \mathbb{E}^+(\varphi(S_T))$ et $x^- = \mathbb{E}^-(\varphi(S_T))$, où $\mathbb{E}^+$ est l'espérance par rapport à la probabilité $p = p^{*+}$ et de même pour $\mathbb{E}^-$. On calcule alors facilement $P\&P_T(\alpha^+) - \varphi(S_T) + x^+$ et $P\&L^S_T(\alpha^-) - \varphi(S_T) + x^-$.

Le théorème suivant est parfois appelé le deuxième théorème fondamental.

Théorème 7.7 *Un marché sans arbitrage est complet si et seulement s'il n'existe qu'une seule probabilité de martingale (et donc un seul prix).*

Preuve : voir Lamberton Lapeyre page 19 et 20. □

Remarque : Vendre une option à n'importe quel prix $x > x^+$ permet de faire un arbitrage. En effet il suffit de garder la prime x et d'appliquer une stratégie α^+. A l'instant final T on a $P\&L^S_T(\alpha^+)(\omega) \geq \Phi(\omega) - x^+$, pour l'état du monde ω qui s'est réalisé. On paie alors $\Phi(\omega)$ et on garde x, et on a donc $x + P\&L^S_T(\alpha^+)(\omega) - \Phi(\omega) \geq x - x^+$. Il reste au moins la quantité strictement positive $x - x^+ > 0$ pour un “free-lunch”.

On peut montrer comment obtenir de même un “free-lunch” en achetant une option de pay off Φ à un prix $x < x^-$.