Chapitre 8

Options américaines

Alors qu'une option européenne ne donne à son détenteur le droit d'exercer (et d'obtenir le pay-off) qu'à un instant fixé T, l'option américaine correspondante lui donne ce droit à un instant *quelconque* $t \in [0..T]_{\delta t} := \{0, \delta t, 2\delta t, \ldots, T = n\delta t\}$ compris entre 0 et T. Par exemple un call européen sur l'actif S_t rapportera $(S_T - K)^+$ à la date T et le call américain sur le même actif sous-jacent rapportera, s'il est exercé à la date t, le pay-off $\varphi(S_t) = (S_t - K)^+$. Nous allons dans cette leçon apprendre à calculer le prix d'une option américaine et au passage nous decouvrirons quelques beaux outils du calcul stochastique comme le théorème d'arrêt optimal ou la décomposition de Doob-Meyer des surmartingales.

8.1 Calcul du prix par récurrence rétrograde

Comme précédemment, le processus (S_t), défini pour tout $t \in [0..T]_{\delta t} := \{0, \delta t, 2\delta t, \ldots, T = N\delta t\}$, représente l'évolution d'un actif financier au cours du temps, et on le suppose adapté par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)$ qui représente l'information disponible à l'instant t. Désignons par U_t la valeur à l'instant t d'une option américaine dont le pay-off est noté $\varphi(S_t)$ (s'il exerce son option à l'instant t, le détenteur de l'option reçoit $\varphi(S_t)$). Comment évaluer son prix ?

On le détermine de proche en proche à partir de la valeur finale la valeur minimale d'un portefeuille de couverture. Tout d'abord, si l'option n'a pas été exercée avant la date finale T, elle vaudra en $t = T$ le pay-off $\varphi(S_T)$. A l'instant précédent $t = T - \delta t$, le vendeur devra pour se couvrir disposer d'une richesse au moins égale au pay-off $\varphi(S_{T-\delta t})$, pour le cas où le détenteur de l'option l'exercerait à cette date, et en même temps au moins égale à $e^{-r\delta t}\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_{T-\delta t})$ qui est le prix d'un portefeuille de couverture lui permettant de faire face à ses obligations à la date T si le détenteur ne vient pas exercer avant T. On peut donc écrire pour le prix de l'option américaine en $T - \delta t$:

$$U_{T-\delta t} = \mathrm{Max}\,\{\varphi(S_{T-\delta t}), e^{-r\delta t}\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_{T-\delta t})\} = \mathrm{Max}\,\{\varphi(S_{T-\delta t}), e^{-r\delta t}\mathbb{E}(U_T/\mathcal{F}_{T-\delta t})\}$$

Mais on peut reproduire ce raisonnement pour l'instant $t = T - 2\delta t$, et ainsi de suite. On obtient ainsi la relation de récurrence retrograde suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lll} U_t & = & \mathrm{Max}\,\big(\varphi(S_t), e^{-r\delta t}\mathbb{E}(U_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)\big) \\ U_T & = & P_T \end{array} \right. \tag{8.1}$$

Dans le cas d'une option européenne, par exemple un Call, on déduit facilement de la relation de récurrence $C_t = e^{-r\delta t}\mathbb{E}(C_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)$ la formule fondamentale $C_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}(C_T/\mathcal{F}_t)$ indiquant que la valeur de l'option à l'instant t est l'espérance actualisée de son pay-off. Dans le cas d'une option américaine, on ne déduit pas facilement de cette relation (8.1) la valeur de U_t directement comme une fonction de t et du pay-off final $\varphi(S_T)$ mais nous verrons qu'il existe néanmoins une formule fermée de ce type, quoique moins explicite. Par contre, il est facile de programmer cette récurrence pour calculer la prime U_t à tout instant t.

On ne sera pas surpris que l'option américaine soit plus chère, ou au moins aussi chère, que l'option européenne correpondante puisqu'elle donne plus de droits. La différence entre les deux s'appelle la *prime d'exercice anticipé* (*early exercice premium*). Dans quels cas a-t-on intérêt à exercer de façon anticipée c'est-à-dire dans quels cas cette prime est-elle strictement positive ? Nous allons voir que ce n'est jamais le cas pour un Call, sauf si l'actif sous-jacent distribue des dividendes et que par contre c'est généralement le cas pour un Put, à moins de pouvoir supposer nul le taux d'intérêt r (ce qui ne serait pas très réaliste).

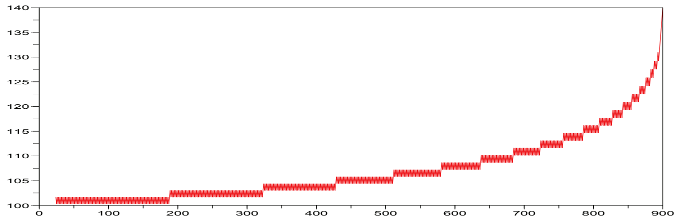

FIGURE 8.1 – Tracé de la frontière d'exercice du put américain à la monnaie dans un modèle de Cox, Ross et Rubinstein avec $\sigma = 0.4$, $r = 0.05$, $T = 1$, et $n = 900$.

Proposition 8.1 *En supposant que l'actif sous-jacent S_t ne distribue pas de dividende, le prix d'un Call américain sur S_t est égal au prix du Call européen de même date et même prix d'exercice. Autrement dit, la prime d'exercice anticipée est nulle.*

Preuve : On déduit de (8.1) que pour tout t, $U_{t+\delta t} \geq \varphi(S_{t+\delta t})$. L'espérance conditionnelle et l'actualisation conservant cette inégalité, il en résulte que

$$e^{-r\delta t}\mathbb{E}(U_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t) \geq e^{-r\delta t}\mathbb{E}(\varphi(S_{t+\delta t})/\mathcal{F}_t) \geq e^{-r\delta t}\varphi(\mathbb{E}(S_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)),$$

cette dernière inégalité résultant de l'inégalité de Jensen [1], puisque $\varphi(S_t) = (S_t - K)^+$ est une fonction convexe de S_t. A présent, comme $e^{-r\delta t}\mathbb{E}(S_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t) = S_t$,

$$e^{-r\delta t}\varphi(\mathbb{E}(S_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)) = e^{-r\delta t}(\mathbb{E}(S_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t) - K)^+ = (e^{-r\delta t}\mathbb{E}(S_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t) - e^{-r\delta t}K)^+ = (S_t - e^{-r\delta t}K)^+ \geq (S_t - K)^+$$

puisque $e^{-r\delta t} \leq 1$. Finalement nous avons bien montré que $e^{-r\delta t}\mathbb{E}(U_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t) \geq \varphi(S_t)$. □

Il n'y a donc pas d'intérêt à exercer l'option Call avant la date finale T. On notera que si l'on remplace dans ce calcul le payoff du Call $(S_t - K)^+$ par celui du Put $(K - S_t)^+$, la dernière inégalité cesse d'être satisfaite dès que $r > 0$. Et, de fait, si l'exercice anticipé n'est jamais intéressant dans le cas du Call, il l'est souvent dans celui du Put (sauf si $r = 0$), comme nous allons le voir maintenant.

8.2 Théorème d'arrêt optimal

Rien dans la formule de récurrence (8.1) ne permet aisément au détenteur de l'option américaine de savoir à quel moment un exercice anticipé pourrait être intéressant pour lui.En réalité, il existe une courbe dans l'espace (t, S_t) appelée la *frontière d'exercice* (voir la figure 8.1) qui a la propriété suivante : aussi longtemps que le cours de l'actif sous-jacent S_t ne franchit pas cette courbe, un exercice anticipé n'est pas intéressant (il est préférable de garder l'option) mais dès que le cours la franchit, il est intéressant d'exercer et il est même préférable de le faire sans attendre. On ne sait pas calculer l'équation explicite de cette courbe mais on peut en calculer des approximations plus ou moins facilement. D'un point de vue théorique, on peut montrer que cette frontière d'exercice est le lieu d'un temps d'arret appelé *temps d'arret optimal*. On a le théorème suivant :

Théorème 8.2 *Si $\mathcal{T}(t,T)$ désigne l'ensemble des temps d'arrêt à valeur dans $[t..T]_{\delta t}$, le prix à l'instant t de l'option américaine de payoff $\varphi(S_t)$ est donnée par*

$$U_t = Max_{\tau \in \mathcal{T}(t,T)}\mathbb{E}(e^{-r(T-\tau)}\varphi(S_\tau)/\mathcal{F}_t)$$

le maximum étant atteint pour le temps d'arrêt τ_t défini par

$$\tau_t := Min\{s \in [t..T]_{\delta t} \ \ , \ \ U_s = \varphi(S_s)\}.$$

Notons qu'en particulier, si on applique ce théorème au cas où $t = 0$, la prime d'une option américaine U_0 est égale à $U_0 = \mathbb{E}(e^{-r\tau_0}\varphi(S_{\tau_0}))$, où τ_0 est le premier instant où le prix de l'option est égal au payoff, c'est-à-dire le premier instant où le maximum de la formule (8.1) est égal au premier des deux termes. Plus précisément, tant que ce maximum est égal au second terme (espérance des valeurs futures), il n'est pas intéressant d'exercer, mais au premier instant où le payoff dépasse la valeur de la couverture, il convient d'exercer.

1. pour φ convexe, $\mathbb{E}(\varphi(X)) \geq \varphi(\mathbb{E}(X))$, puisque l'hypergraphe de φ est convexe - observer comment sont localisés $\mathbb{E}(X, \varphi(X))$ et $(\mathbb{E}(X), \varphi(\mathbb{E}(X))$; dans notre contexte finitaire, $\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t)(\omega) = \mathbb{E}(Y|\overline{\omega}_t)$, où $\overline{\omega}_t$ désigne l'atome de ω dans l'algèbre $\mathcal{F}_t$.

Preuve : Pour simplifier, voici la preuve dans le cas particulier où $t = 0$ le cas général étant très semblable.

On introduit la valeur actualisée de l'option américaine $\tilde{U}_t$ définie par $\tilde{U}_t = e^{-rt}U_t$ et on considère $\tilde{U}_{t\wedge\tau_0}(\omega)$ qui est égale à $\tilde{U}_t(\omega)$ aussi lontemps que $t < \tau_0(\omega)$ et à une constante $\tilde{U}_{\tau_0(\omega)}(\omega)$ pour tout $t \geq \tau_0(\omega)$. Cette marche est appelée la marche $\tilde{U}$ arrêtée au temps τ_0. Nous allons vérifier que cette marche est une $\mathcal{F}_t$-martingale : par définition de τ_0, comme $1 = \mathbb{I}_{t<\tau_0} + \mathbb{I}_{t\geq\tau_0}$ et ces deux indicatrices étant $\mathcal{F}_t$-mesurable, puisque τ_0 est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\tilde{U}_{(t-\delta t)\wedge\tau_0} - \tilde{U}_{t\wedge\tau_0}/\mathcal{F}_t) &= \mathbb{I}_{t<\tau_0}\mathbb{E}(\tilde{U}_{(t-\delta t)\wedge\tau_0} - \tilde{U}_{t\wedge\tau_0}/\mathcal{F}_t) + \mathbb{I}_{t\geq\tau_0}\mathbb{E}(\tilde{U}_{(t-\delta t)\wedge\tau_0} - \tilde{U}_{t\wedge\tau_0}/\mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{t<\tau_0}(\tilde{U}_{(t-\delta t)\wedge\tau_0} - \tilde{U}_{t\wedge\tau_0})/\mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(\mathbb{I}_{t\geq\tau_0}(\tilde{U}_{(t-\delta t)\wedge\tau_0} - \tilde{U}_{t\wedge\tau_0})/\mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{t<\tau_0}(\tilde{U}_{t-\delta t} - \tilde{U}_t)/\mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(\mathbb{I}_{t\geq\tau_0}(\tilde{U}_{\tau_0} - \tilde{U}_{\tau_0})/\mathcal{F}_t).
\end{aligned}$$

Or sur $\{t < \tau_0\}$, $\tilde{U}_{t-\delta t} = \mathbb{E}(\tilde{U}_t/\mathcal{F}_{t-\delta t})$ d'après (8.1) et donc le premier terme est nul. C'est évidemment le cas aussi du second donc $\tilde{U}_{t\wedge\tau_0}$ est bien une martingale.

Il en résulte que $\tilde{U}_{0\wedge\tau_0} = \mathbb{E}(\tilde{U}_{T\wedge\tau_0})$ et donc que l'on a bien $U_0 = \mathbb{E}(\varphi(S_{\tau_0}))$.

Il reste a vérifier que pour tout temps d'arrêt $\tau \in \mathcal{T}(t, T)$, $\mathbb{E}(\varphi(S_{\tau_0})) \geq \mathbb{E}(\varphi(S_\tau))$. On a bien en effet

$$\mathbb{E}(\varphi(S_{\tau_0})) = U_0 \geq \mathbb{E}(U_{t\wedge\tau}) = \mathbb{E}(U_\tau) \geq \mathbb{E}(\varphi(S_\tau))$$

la première inégalité résultant du fait qu'une surmartingale arrêtée (ici il s'agit de $\tilde{U}_{t\wedge\tau}$) est encore une surmartingale (exercice) et la seconde du fait que pour tout t on a $U_t \geq \varphi(S_t)$ d'après (8.1). □

Remarque : Si l'on désigne comme nous l'avons fait pour U_t, par $\widetilde{\varphi(S_t)}$ le payoff actualisé, la formule (8.1) peut s'écrire plus simplement

$$\tilde{U}_t = \max\{\widetilde{\varphi(S_t)}, \mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)\}.$$

On peut alors vérifier que $\tilde{U}_t$ est une surmartingale, et plus précisément que cette formule la définit comme *la plus petite surmartingale qui majore le payoff actualisé* $\widetilde{\varphi(S_t)}$. C'est ce que l'on appelle l'*enveloppe de Snell* de ce payoff actualisé $\widetilde{\varphi(S_t)}$.

Le théorème précédent est en fait un théorème général qui permet d'exprimer toute enveloppe de Snell comme une martingale obtenue en arrêtant de façon appropriée la surmartingale constituée par cette enveloppe de Snell.

8.3 Stratégie de couverture avec consommation

Nous avons justifié la définition par récurrence retrograde du prix de l'option américaine en indiquant qu'avec cette valeur le vendeur de l'option pouvait se couvrir dans tous les cas, que le détenteur exerce de façon anticipé ou non. Mais comme nous allons le voir maintenant il ne s'agit plus ici, comme dans le cas européen, d'une couverture exacte car autofinancée mais plutot d'une *surcouverture* encore appelée *couverture avec consommation*. En effet, tant que la frontière d'exercice n'a pas été franchie, la prime U_0, investie dans un portefeuille de couverture, gérée de façon dynamique comme pour la couverture d'une option européenne, fournit une couverture exacte en ce sens que la valeur du portefeuille à chaque instant est exactement égale à la valeur de l'option américaine. Une fois la frontière d'exercice franchie (si cela a lieu), il y a deux possibilités. Soit le détenteur de l'option l'exerce, il recupère le payoff et l'option cesse d'exister. Soit il n'exerce pas (il n'a pas noté le franchissement de la frontière d'exercice, ou il a mieux à faire) et dans ce cas le vendeur peut constituer son portefeuille de couverture à un prix strictement inférieur au payoff et réalise un gain aux dépens du détenteur négligeant. Ce "revenu" durera aussi longtemps que le prix de l'action restera inférieur à la "frontière d'exercice" et que le détenteur de l'option n'exerce pas son droit, rapportant une richesse strictement positive que l'on désigne sous le nom de consommation et qui restera acquise au vendeur de l'option.

La couverture d'une option américaine est donc une *surconverture* qui peut soit être une simple couverture (exacte) soit générer une consommation, selon les cas.

Il y a une façon simple et élégante de formaliser cette situation au moyen d'un résultat connu sous le nom de *Décomposition de Doob-Meyer.*

Théorème 8.3 *Soit $\tilde{U}_t$ une $\mathcal{F}_t$-surmartingale. Il existe une marche aléatoire A_t croissante et prévisible (c'est-à-dire telle que pour tout t A_t soit $\mathcal{F}_{t-\delta t}$-mesurable) telle que*

$$\tilde{U}_t = M_t - A_t$$

où M_t est une $\mathcal{F}_t$-martingale. Cette décomposition de $\tilde{U}_t$ s'appelle sa décomposition de Doob-Meyer.

Preuve : La démonstration de ce théorème est particulièrement simple dans le cas discret où nous nous plaçons ici. On définit les deux marches A_t et M_t de la façon suivante :

$$A_0 := 0 \quad A_{t+\delta t} := A_t + \mathbb{E}(\tilde{U}_t - \tilde{U}_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)$$

et

$$M_0 := \tilde{U}_0 \quad M_{t+\delta t} := M_t + \tilde{U}_{t+\delta t} - \mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)$$

Puis on vérifie qu'elles satisfont les propriétés annoncées. Tout d'abord A_t est croissante car $\tilde{U}_t$ est une surmartingale, et est prévisible par construction. D'autre part on a :

$$\mathbb{E}(M_{t+\delta t} - M_t/\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)/\mathcal{F}_t) = 0$$

en appliquant simplement la linéarité et la transitivité de l'espérance conditionnelle. D'où le fait que M_t soit une $\mathcal{F}_t$-martingale. Le fait que $\tilde{U}_t = M_t - A_t$ se prouve alors par récurrence sur $t \in [0..T]_{\delta t}$. □

Dans le théorème suivant, on note, pour simplifier, Z_t le payoff actualisé de l'option américaine.

Théorème 8.4 *Soit Z_t un processus adapté à $\mathcal{F}_t$ et soit $\tilde{U}_t$ son enveloppe de Snell. Soit $\tilde{U}_t = M_t - A_t$ la décomposition de Doob-Meyer de $\tilde{U}_t$. Alors le temps d'arrêt optimal τ_0 défini par $\tau_0 = Min\{s \in [0..T]_{\delta t} \;,\; U_s = Z_s\}$ est égal au temps d'arrêt $\tau_A = Min\{s \in [0..T]_{\delta t} \;,\; A_{s+\delta t} \neq 0\}$ si $A_T \neq 0$ et $\tau_0 = T$ sinon.*

Ce théorème affirme donc que le temps d'arrêt optimal, c'est à dire l'instant d'exercice optimal pour le détenteur, est le premier instant où le processus croissant A_t cesse d'être nul. Ce processus apparaît donc comme représentant précisément la consommation. En effet, dès que la frontière d'exercice est franchie, si le détenteur n'exerce pas l'option, la valeur de l'option cesse d'être la valeur d'un portefeuille autofinancé et commence à générer une consommation égale au processus croissant A_t. C'est cette consommation qui fait de l'option américaine une surmartingale (et non une martingale comme l'option européenne) et du portefeuille de couverture une sur couverture (et non une couverture exacte comme pour l'option européenne).

Preuve : La preuve montre successivement que $\tau_A \geq \tau_0$ et que $\tau_A \leq \tau_0$.

— Soit $t \in [0..T]_{\delta t}$. Sur $\{\tau_A = t\}$, $A_t = 0$ et $A_{t+\delta t} \neq 0$. Donc $\tilde{U}_t = M_t - A_t = M_t$ et $\tilde{U}_{t+\delta t} = M_{t+\delta t} - A_{t+\delta t} < M_{t+\delta t}$. Donc

$$\mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t) < \mathbb{E}(M_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t) = M_t = \tilde{U}_t.$$

Comme $\tilde{U}_t = \text{Max}\{Z_t, \mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)\}$, ceci entraine que $\tilde{U}_t = Z_t$. Donc, par définition de τ_0, $\tau_A \geq \tau_0$.

— Soit $s \in [0..T]_{\delta t}$. Sur $\{\tau_0 = s + \delta t\}$, $\tilde{U}_{s+\delta t} = Z_{s+\delta t}$ et $\tilde{U}_s > Z_s$. Donc, comme A_t est prévisible,

$$\tilde{U}_s = \mathbb{E}(\tilde{U}_{s+\delta t}/\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(M_{s+\delta t} - A_{s+\delta t}/\mathcal{F}_s) = M_s - A_{s+\delta t} = \tilde{U}_s + A_s - A_{s+\delta t}$$

Donc $A_{s+\delta t} = A_s$, d'où $\tau_A \leq \tau_0$.

□